

5. prednáška

Kvantová mechanika I – stavy kvantového systému, experimenty s polarizovanými fotónmi, pozorovateľnosť, úplnosť vlastného systému pozorovateľnej, princíp superpozície, meranie

Kvantová mechanika je prezentovaná vo forme, ako bola rozvinutá Diracom prostredníctvom jeho formalizmu založená na konečno-rozmerných Hilbertových priestoroch, ktorých teória bola prezentovaná v predchádzajúcej 4. prednáške. Fyzikálne princípy kvantovej mechaniky sú vyjadrené v koncentrovanej podobe pomocou niekoľkých postulátov (axióm).

5.1 Kvantový systém a jeho stavy

Kvantový systém Q je špecifikovaný stavmi, ktoré sú reprezentované ket vektormi z n -rozmerného Hilbertovho priestoru H

$$|label\rangle \quad (5.1)$$

kde „*label*“ je obvykle reprezentovaný reťazcom symbolov, ktoré špecifikujú stav systému.

Definícia 5.1. Hovoríme, že dva vektory $|\alpha\rangle$ a $|\beta\rangle$ reprezentujú *rovnaký stav* kvantového systému Q vtedy a len vtedy, ak vektory sú lineárne závislé, t. j. existuje také komplexné číslo $a \in \mathbb{C}$

$$|\alpha\rangle = a|\beta\rangle \quad (5.2)$$

K tomu, aby sme odstránili nejednoznačnosť (5.2) s reprezentáciou stavov kvantových systémov, budeme požadovať, aby ket vektory, ktoré reprezentujú stavy, boli normalizované

$$\|\alpha\rangle = 1 \Leftrightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \quad (5.3)$$

5.1.1 Kvantovo-mechanická reprezentácia polarizovaných fotónov

Polarizovaný stav fotónu bude reprezentovaný vektorom vektorom z 2-rozmerného Hilbertového priestoru. V tomto priestore si môžeme zvoliť niekoľko alternatívnych ortonormálnych báz:

(1) Ľavo a pravotočivá cirkulárna polarizácia fotónov

$$\mathcal{B}_1 = \{|\circ\rangle, |\ominus\rangle\} \quad (5.4a)$$

(2) Vertikálna a horizontálna polarizácia fotónov

$$\mathcal{B}_2 = \{|\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle\} \quad (5.4b)$$

(3) Lineárne polarizované fotóny s uhlom polarizácie $\varphi = \pi/2$ resp. $\varphi = -\pi/2$

$$\mathcal{B}_3 = \{|\nearrow\rangle, |\searrow\rangle\} \quad (5.4c)$$

Prechody medzi týmito ortonormálnymi bázami sú realizované lineárnymi kombináciami

$$\left. \begin{aligned} |\nearrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\rightarrow\rangle) \\ |\searrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\rightarrow\rangle) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nearrow\rangle + |\searrow\rangle) \\ |\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nearrow\rangle - |\searrow\rangle) \end{cases} \quad (5.5a)$$

$$\left. \begin{aligned} |\circ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\rightarrow\rangle) \\ |\ominus\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\rightarrow\rangle) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle + |\ominus\rangle) \\ |\rightarrow\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle - |\ominus\rangle) \end{cases} \quad (5.5a)$$

$$\left. \begin{aligned} |\nearrow\rangle &= \frac{1+i}{2}|\circ\rangle + \frac{1-i}{2}|\ominus\rangle \\ |\searrow\rangle &= \frac{1-i}{2}|\circ\rangle - \frac{1+i}{2}|\ominus\rangle \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} |\circ\rangle = \frac{1-i}{2}|\nearrow\rangle + \frac{1+i}{2}|\searrow\rangle \\ |\ominus\rangle = \frac{1+i}{2}|\nearrow\rangle - \frac{1-i}{2}|\searrow\rangle \end{cases} \quad (5.5c)$$

Tieto vzťahy môžeme vyjadriť pomocou transformačných matic

	$ \uparrow\rangle$	$ \rightarrow\rangle$	$ \nearrow\rangle$	$ \searrow\rangle$	$ \circ\rangle$	$ \ominus\rangle$
$ \uparrow\rangle$	1	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$ \rightarrow\rangle$	0	1	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$i/\sqrt{2}$	$-i/\sqrt{2}$
$ \nearrow\rangle$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	0	$(1+i)/2$	$(1-i)/2$
$ \searrow\rangle$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	1	$(1-i)/2$	$(1+i)/2$
$ \circ\rangle$	$1/\sqrt{2}$	$-i/\sqrt{2}$	$(1-i)/2$	$(1+i)/2$	1	0
$ \ominus\rangle$	$1/\sqrt{2}$	$i/\sqrt{2}$	$(1+i)/2$	$(1-i)/2$	0	1

Pre názornosť vyjadríme ket vektory pomocou stĺpcových vektorov, potom bra vektory musia byť vyjadrené pomocou riadkových vektorov

$$\left. \begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |\rightarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle\uparrow| = (1 \ 0) \\ \langle\rightarrow| = (0 \ 1) \end{cases} \quad (5.6a)$$

$$\left. \begin{aligned} |\nearrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |\searrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle\nearrow| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 1) \\ \langle\searrow| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ -1) \end{cases} \quad (5.6b)$$

$$\left. \begin{aligned} |\circ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ |\circ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \langle\circ| &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -i) \\ \langle\circ| &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad i) \end{aligned} \right. \quad (5.6c)$$

V tejto reprezentácii tenzorový súčin $|\nearrow\circ\rangle$ je interpretovaný stĺpcovým vektorom

$$|\nearrow\circ\rangle = |\nearrow\rangle \otimes |\circ\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (5.7a)$$

$$|\circ\rangle\langle\circ| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1 \quad -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7b)$$

5.2 Pozorovateľná

Definícia 5.2. Nech stavy kvantového systému Q sú reprezentované vektormi z n -rozmerného Hilbertovho priestore H . Hovoríme, že lineárny operátor O definovaný v H špecifikuje **pozorovateľnú** kvantového systému Q vtedy a len vtedy, keď je tento operátor hermitovský, $O^+ = O$.

Spektrálny rozvoj pozorovateľnej O má tvar (4.33)

$$O = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i \quad (5.8)$$

kde vlastná hodnota λ_i vyjadruje i -tú vlastnosť pozorovateľnej O , P_i je hermitovský projekčný operátor na podpriestor $H_i \subseteq H$ indukovaný vlastnými vektormi, ktoré sú pridružené vlastnej hodnote λ_i

$$|\varphi\rangle \in H_i \Rightarrow O|\varphi\rangle = \lambda_i |\varphi\rangle.$$

Definícia 5.3. Hovoríme, že charakteristický systém pozorovateľnej O je **úplny** vtedy a len vtedy, ak

$$\sum_{k=1}^p P_k = 1 \quad (5.9)$$

Podmienka úplnosti charakteristického systému pozorovateľnej O umožňuje formulovať princíp superpozície.

Definícia 5.4. Hovoríme, že platí **princíp superpozície** vtedy a len vtedy, ak každý stav $|\psi\rangle$ systému Q môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu charakteristických funkcií nejakej pozorovateľnej O

$$|\psi\rangle = 1 \cdot |\psi\rangle = \left(\sum_{i=1}^p P_i \right) |\psi\rangle = \sum_{j=1}^n a_j |\varphi_j\rangle \quad (5.10)$$

Pri definícii princípu superpozície sme využili podmienku úplnosti (5.9) charakteristického systému pozorovateľnej O , ktorú môžeme prepísať do ekvivalentného tvaru, ak každý projektor P_i vyjadríme pomocou dyadických produktov charakteristických vektorov pozorovateľnej O

$$P_i = \sum_{j=1}^{k_i} |\varphi_j^{(i)}\rangle \langle \varphi_j^{(i)}| \Rightarrow \sum_{i=1}^p P_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} |\varphi_j^{(i)}\rangle \langle \varphi_j^{(i)}| = \sum_{k=1}^n |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| = 1 \quad (5.11)$$

kde na pravej strane (5.11) sme vhodným preindexovaním použili ortonormálnu bázu funkcií, ktorá vznikla z charakteristických funkcií $|\varphi_j^{(i)}\rangle$.

Ak kvantový systém Q je v stave popísanom normalizovaným vektorom $|\psi\rangle$, kde $\| |\psi\rangle \| = 1 \Rightarrow \langle \psi | \psi \rangle = 1$, potom stredná hodnota pozorovateľnej O je určená maticovým elementom $\langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle$. Ak stav $|\psi\rangle$ je vyjadrený pomocou superpozície (5.10) charakteristických funkcií pozorovateľnej O , potom stredná hodnota $\langle O \rangle$ má tvar

$$\langle O \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i^* a_j \langle \varphi_i | O | \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \lambda_i \quad (5.12)$$

kde λ_i je charakteristická hodnota pozorovateľnej O . V prípade, že stav $|\psi\rangle = |\varphi_i\rangle$ (hovoríme, že je čistý, v opačnom prípade, ak stav $|\psi\rangle$ je určený lineárnou kombináciou viacerých stavov, hovoríme, že je zmiešaný).

5.2.1 Ilustračný príklad úplnosti a princípu superpozície

Nech unitárny priestor H obsahuje bázu 4 ortonormálnych vektorov

$$\mathcal{B} = \{ |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \}$$

a nech v tejto báze pozorovateľná O je reprezentovaná maticou

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristické hodnoty pozorovateľnej O určíme pomocou sekulárnej rovnice

$$|O - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2i & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2i & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 4)^2 = 0$$

Táto algebraická rovnica má dva reálne korene

$$\lambda_1 = 2 \quad (k_1 = 2)$$

$$\lambda_2 = -2 \quad (k_2 = 2)$$

Charakterické vektory priradené týmto hodnotám sú určené riešením homogénneho systému rovníc

$$(\mathbf{O} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{c} = 0$$

Ak $\lambda = \lambda_1$, potom tento homogénny systém má tvar

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2i \\ 2i & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

Ak prepíšeme túto maticou rovnicu do zložkového tvaru a vynecháme lineárne závislé rovnice, potom dostaneme

$$c_1 + ic_3 = 0$$

$$c_2 - ic_4 = 0$$

Riešenie týchto rovníc dostaneme má tvar 2-parametrického systému

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -iu \\ iv \\ u \\ v \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pre $u = i, v = 0$ a $u = 0, v = -i$ dostaneme dva ortogonálne vektory

$$\mathbf{c}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

Podobným spôsobom získame aj charakteristické vektory priradené charakteristickej hodnote λ_2 , výsledky sú zhrnuté v tabuľke

charakteristické hodnoty	charakteristické vektory
$\lambda_1 = 2$	$ \varphi_1^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + i 2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, i, 0)^T$ $ \varphi_1^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\rangle - i 3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -i)^T$
$\lambda_2 = -2$	$ \varphi_2^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - i 2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -i, 0)^T$ $ \varphi_2^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\rangle + i 3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, i)^T$

Spektrálny rozvoj pozorovateľnej O má tvar

$$O = 2(|\varphi_1^{(1)}\rangle\langle\varphi_1^{(1)}| + |\varphi_2^{(1)}\rangle\langle\varphi_2^{(1)}|) + (-2)(|\varphi_1^{(2)}\rangle\langle\varphi_1^{(2)}| + |\varphi_2^{(2)}\rangle\langle\varphi_2^{(2)}|)$$

alebo v maticovej reprezentácii

$$\mathbf{O} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & i/2 \\ i/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{P_1} + (-2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -i/2 \\ -i/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{P_2}$$

Lahko sa presvedčíme, že suma týchto projekčných operátorov – matic je jednotková matica
 $P_1 + P_2 = E$

5.2.2 Ilustračný príklad Pauliho spinových matic

Pauliho spinové matice majú tvar

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sú príkladom pozorovateľných, ktoré sa často využívajú v kvantovom počítaní. Ich charakteristické systémy sú špecifikované v tabuľke

Pauliho matice	Charakteristické hodnoty/vektory	
$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	+1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	+1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + i 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle - i 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	+1	$ 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	-1	$ 1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tak napríklad spektrálny rozklad matice σ_1 má tvar

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (+1) \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) + (-1) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle 0| - \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (+1)|1\rangle\langle 1| + (-1)|-1\rangle\langle -1| \end{aligned}$$

Podľa tejto definície, stav z predchádzajúceho príkladu $|\psi(1)\rangle = 1/\sqrt{2}(|00\rangle - |11\rangle)$, systému Q , ktorý obsahuje ako podsystemy Q_1 a Q_2 , je entaglovaný; nemôžeme ho vyjadriť pomocou tenzorového súčinu dvoch stavov, ktoré špecifikujú 1-qubitové systémy Q_1 a Q_2 .

5.3 Heisenbergov princíp neurčitosti

Nech kvantový systém Q obsahuje dve pozorovateľné A a B , ktoré medzi sebou nekomutujú, $[A, B]_- \neq 0$, zavedieme dva nové operátory

$$\Delta A = A - \langle A \rangle, \quad \Delta B = B - \langle B \rangle$$

Veta 5.1. Pre pozorovateľné A a B , ktoré spolu nekomutujú, $AB - BA = [A, B]_- \neq 0$, neurčitosti

$\langle \Delta A \rangle = \sqrt{\langle \psi | (\Delta A)^2 | \psi \rangle}$ a $\langle \Delta B \rangle = \sqrt{\langle \psi | (\Delta B)^2 | \psi \rangle}$ spĺňajú nerovnosť

$$\langle \Delta A \rangle \langle \Delta B \rangle \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B]_- | \psi \rangle| \quad (5.13)$$

Ako dôsledok tejto vety naformulujeme podmienky, kedy pozorovateľné A a B sú súčasne presne merateľné.

Veta 5.2. Pre pozorovateľné A a B môžeme súčasne presne merať pre $\langle \Delta A \rangle = \langle \Delta B \rangle = 0$ vtedy a len vtedy, ak pozorovateľné spolu komutujú, $AB - BA = [A, B]_- = 0$.

Dôkaz vety 5.1 je založený na Schwartzovej nerovnosti (2.4). Počítajme veličinu

$$\begin{aligned} \langle \Delta A \rangle^2 \langle \Delta B \rangle^2 &= \langle \psi | (\Delta A)^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta B)^2 | \psi \rangle \\ &= \langle \Delta A \psi | \Delta A \psi \rangle \langle \Delta B \psi | \Delta B \psi \rangle \\ &= |\Delta A \psi|^2 |\Delta B \psi|^2 \\ &\geq \langle \Delta A \psi | \Delta B \psi \rangle^2 \\ &= (\operatorname{re} \langle \Delta A \psi | \Delta B \psi \rangle)^2 + (\operatorname{im} \langle \Delta A \psi | \Delta B \psi \rangle)^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

kde nerovnosť sme dostali použitím Schwartzovej nerovnosti. Pre reálnu a imaginárnu časť maticového elementu $\langle \Delta A \psi | \Delta B \psi \rangle$ dostaneme

$$\operatorname{re} \langle \Delta A \psi | \Delta B \psi \rangle = \frac{1}{2} (\langle AB + BA \rangle - 2 \langle A \rangle \langle B \rangle)$$

$$\operatorname{im} \langle \Delta A \psi | \Delta B \psi \rangle = \frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle$$

Dosadením týchto výrazov do (5.14) získame heisenbergovu reláciu neurčitosti (5.13).

Dôkaz vety 5.2 pre nutnú a dostatočnú podmienku k súčasnej presnej merateľnosti pozorovateľných A a B je jednoduchý. Z podmienky $\langle \Delta A \rangle = \langle \Delta B \rangle = 0$ priamo plynie podmienka vzájomnej komutovateľnosti pozorovateľných A a B , $[A, B] = 0$. Predpokladajme teraz, že pozorovateľné A a B vzájomne komutujú, potom tieto pozorovateľné majú spoločné vlastné vektory. Nech $|\psi\rangle$ je vlastný vektor pozorovateľných, potom

$$\begin{aligned} \langle \Delta A \rangle &= \sqrt{\langle \psi | (\Delta A)^2 | \psi \rangle} = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle) \psi | (A - \langle A \rangle) \psi \rangle} \\ &= \sqrt{\langle (\lambda - \langle A \rangle) \psi | (\lambda - \langle A \rangle) \psi \rangle} = 0 \end{aligned}$$

kde $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$. Podobným spôsobom dokážeme aj $\langle \Delta B \rangle = 0$, čím sme dokončili dôkaz vety 5.2.

5.4 Meranie

Nech kvantový systém Q s pozorovateľnou O sa nachádza v stave $|\psi\rangle$, ktorý pomocou predpokladu úplnosti charakteristického systému O a princípu superpozície môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |\phi_i\rangle \quad (2.15)$$

kde $O|\phi_i\rangle = \lambda_i |\phi_i\rangle$, pre $i=1,2,\dots,n$.

Definícia 5.5. Hovoríme, že **meranie** kvantového systému Q v stave $|\psi\rangle$ produkuje charakteristickú hodnotu λ_i s pravdepodobnosťou $|a_i|^2$ vtedy a len vtedy, ak

$$\frac{P_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_i | \psi \rangle}} = |\phi_i\rangle \quad (2.16)$$

Ak platí (2.13), potom pravdepodobnosť $|a_i|^2$ nameranie charakteristickej hodnoty λ_i môžeme alternatívne vyjadriť takto

$$|a_i|^2 = \langle \psi | P_i | \psi \rangle \quad (2.17)$$

Parafrázujúc Diraca [xx] môžeme povedať, že meranie vždy zapríčiňuje skok kvantového systému na charakteristický stav pozorovateľnej O , ktorá je meraná. Ak kvantový systém Q je v stave $|\psi\rangle$, potom meranie môže byť schematicky reprezentované takto

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n P_k |\psi\rangle \xrightarrow[\text{prob} = \langle \psi | P_i | \psi \rangle]{\text{prvé meranie}} \frac{P_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_i | \psi \rangle}} \xrightarrow[\text{prob} = 1]{\text{druhé meranie}} \frac{P_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_i | \psi \rangle}}$$

5.4.1 Ilustračný príklad merania

Použijeme pozorovateľnú O z kapitoly 2.2.1. Nech stav kvantového systému Q s pozorovateľnou O je špecifikovaný vektorom

$$|\psi\rangle = \frac{1}{3}(2|0\rangle + 2i|1\rangle - |3\rangle) = \frac{1}{3}(2, 2i, 0, -1)^T$$

Potom meranie vzhľadom ku kvantovému systému Q vzhľadom ku pozorovateľnej O je sumarizované v tejto tabuľke

j	$\text{prob} = \langle \psi P_j \psi \rangle$	charakteristická hodnota λ_j	výsledný stav $P_j \psi\rangle / \sqrt{\langle \psi P_j \psi \rangle}$
0	5/18	+2	$(1/\sqrt{10})(2 0\rangle + i 1\rangle + 2i 2\rangle + 3\rangle)$
1	13/18	-2	$(1/\sqrt{26})(2 0\rangle + 3i 1\rangle - 2i 2\rangle - 3 3\rangle)$

5.4.2 Ilustračný príklad merania

Nech unitárny priestor obsahuje ortonormálnu bázu

$$\mathcal{B} = \{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle\}$$

a nech pozorovateľná O je definovaná ako projektor

$$O = |0\rangle\langle 0|$$

Charakteristický systém tohto operátora je špecifikovaný tabuľkou

charakteristické hodnoty	ortonormálne charakteristické vektory
$\lambda_1 = 1$	$ 1\rangle = \varphi_1\rangle$
$\lambda_2 = 0$	$ 2,1\rangle = \varphi_2\rangle$
	$ 2,2\rangle = \varphi_3\rangle$

	$ 2,n-1\rangle = \varphi_n\rangle$

Potom ľubovoľný stav $|\psi\rangle$ môže byť vyjadrený takto

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |\varphi_i\rangle$$

kde

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1$$

Ak je kvantový systém Q meraný vzhľadom k pozorovateľnej O , potom výsledky merania sú uvedené v tabuľke

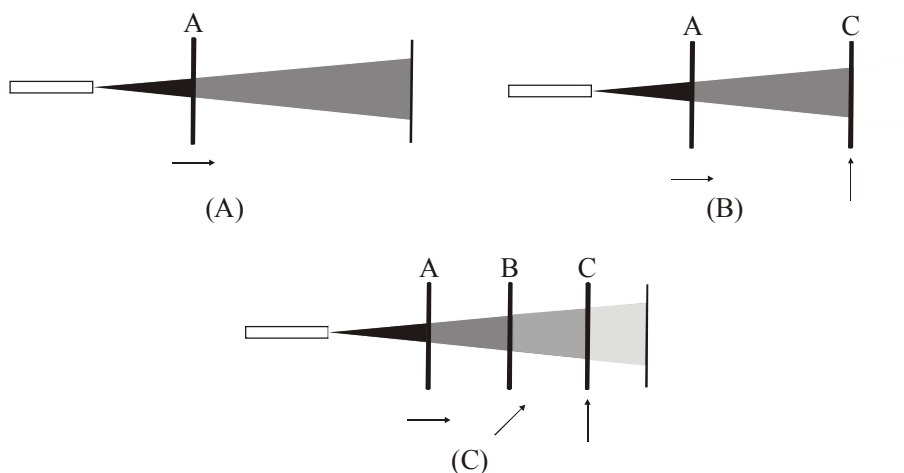
j	$prob = \langle \psi P_j \psi \rangle$	charakteristická hodnota λ_j	výsledný stav $P_j \psi\rangle / \sqrt{\langle \psi P_j \psi \rangle}$
1	$ a_1 ^2$	+1	$ \varphi_1\rangle$
2	$\sum_{i=2}^n a_i ^2$	0	$\sum_{i=2}^n a_i \varphi_i\rangle / \sqrt{\sum_{i=2}^n a_i ^2}$

5.4.3 Ilustračný príklad merania polarizovaných fotónov

Fotóny sú jediné elementárne častice, ktoré môžeme priamo pozorovať. Nasledujúce experimenty sú jednoducho uskutočniteľné pomocou optickej lavice, laserovho zdroja svetla a polarizačných filtrov. Pomocou týchto "fotónových" experimentov ukážeme základné kvantovo-mechanické vlastnosti, ktoré sú potrebné pre pochopenia základných princípov kvantového počítania.

Diagram (A) znázorňuje experiment v ktorom lúč svetla necháme prechádzať svetelným filtrom s horizontálnou polarizáciou. Predpokladáme, že svetlo je náhodne polarizované, výstupná intenzita svetla horizontálne polarizovaného je polovičná vzhľadom k intenzite dopadajúceho svetla. Funkcia filtru nemôže byť vysvetlená ako „sito“, ktoré prepúšťa len fotóny horizontálne polarizované. Prepúšťa ak fotóny, ktoré nie sú horizontálne polarizované, z týchto fotónov vytvára nové fotóny, ktoré už majú horizontálnu polarizáciu. Diagram (B) znázorňuje situáciu z predošlého diagramu, keď za filter A vložíme ešte ďalší filter C, ktorý má vertikálnu polarizáciu. V tomto prípade, žiadny horizontálne polarizovaný fotón už neprejde filtrom C, to znamená, že za týmto filtrom už máme nulovú intenzitu svetla.

V tomto prípade, už môžeme použiť analógiu so sitom, ktoré neprepúšťa horizontálne polarizované fotóny. Konečne, diagram (C) znázorňuje situáciu z predchádzajúceho diagramu, keď za filter B dáme ešte ďalší filter C s vertikálnou polarizáciou. V tomto prípade nastáva situácia, ktorá je v protiklade s našim intuitívnym očakávaním. Podľa našich „intuitívnych“ skúsenosti, vloženie ďalšieho filtra môže mať za dôsledok len zníženie intenzity prechádzajúceho svetla.



Obrázok 5.1. Na jednotlivých diagramoch je znázornený lúč svetla, ktorý je premietaný na projekčnú dosku. Polarizačné filtre A, B a C prepúšťajú svetlo polarizované horizontálne, 45° resp. vertikálne. Tieto filtre sú vkladané do dráhy svetelného lúča.

Diagram A môže byť prepísaný do tvaru merania, kde vstupný fotón má cirkulárnu polarizáciu, prechádza filtrom s horizontálnou polarizáciou s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Túto skutočnosť interpretujeme ako proces merania vzhľadom k vektorom s horizontálnou polarizáciou. Musíme poznamenať, že po procese merania (po prechode polarizačným filtrom) výstupné fotóny s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ nemajú vertikálnu polarizáciu.

$$\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\rightarrow\rangle \longrightarrow \text{filter} \begin{cases} \text{prob} = |\alpha|^2 \longrightarrow |\rightarrow\rangle \\ \text{prob} = |\beta|^2 \longrightarrow |\rightarrow\rangle \end{cases}$$

Diagram B vznikol z diagramu A tak, že na záver je pridaný ďalší filter s vertikálnou polarizáciou, to znamená, že vykonávame ďalšie meranie vzhľadom k charakteristickému stavu $|\uparrow\rangle$ fotónu s vertikálnou polarizáciou. Pretože predchádzajúce meranie vyprodukovalo fotón v čistom charakteristickom stave s horizontálnou polarizáciou, na záver druhého merania s jednotkovou pravdepodobnosťou nevzniká žiadny stav.

$$\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\rightarrow\rangle \longrightarrow \text{filter} \xrightarrow{\text{prob} = |\alpha|^2} |\rightarrow\rangle \xrightarrow{\text{prob} = 1} \text{žiadny fotón}$$

Konečne, diagram B je rozšírený o tretie meranie, ktoré je zaradené medzi prvé a druhé meranie, pre prehľadnosť uvedieme všetky tri merania:

1. meranie – náhodne vygenerovaný fotón je podrobený meraniu vzhľadom k charakteristickému stavu $|\rightarrow\rangle$ s horizontálnou polarizáciou,
2. meranie – fotón s horizontálnou polarizáciou $|\rightarrow\rangle$, vyprodukovaný prvým meraním, je podrobený meraniu vzhľadom k charakteristickému stavu $|\nearrow\rangle$,
3. meranie – fotón v stave $|\nearrow\rangle$ je podrobený meraniu vzhľadom k charakteristickému vektoru $|\uparrow\rangle$

$$\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\rightarrow\rangle \longrightarrow \text{polarizátor} \xrightarrow{\text{prob} = |\alpha|^2} |\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\searrow\rangle) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \text{polarizátor} \xrightarrow{\text{prob} = 1/2} |\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\rightarrow\rangle) \longrightarrow \text{polarizátor} \xrightarrow{\text{prob} = 1/2} |\uparrow\rangle$$