LINEÁRNA ALGEBRA

1. Úvodné poznámky

Jeden zo spoluzakladateľov kvantovej mechaniky P. A. M. Dirac ukázal, že najvhodnejším matematickým jazykom pre formulovanie kvantovej mechaniky je lineárna algebra a jej zovšeobecnenie – teória lineárnych operátorov v Hilbertovom priestore. Pomocou tohto pomerne jednoduchého formalizmu dajú sa abstraktne formulovať všetky zákonitosti kvantovej mechaniky. Úvahy nad diferenciálnymi rovnicami a diferenciálnymi operátormi sú prevedené na jednoduché operácie s operátormi, čím sa stáva tento prístup nezastupiteľný hlavne v heuristickej oblasti diskusie a odvodzovania zákonitostí kvantovej mechaniky z jej prvých princípov.

2. Lineárny priestor

Prv než pristúpime k formulácii pojmu lineárny priestor, musíme si presne špecifikovať pojem "skalár" a "pole skalárov". Pod skalárom budeme rozumieť ľubovoľné (1) racionálne číslo,

(2) iracionálne číslo, alebo

(3) komplexné číslo.

Nech $\mathcal{C} = \{\alpha, \beta, \dots\}$ je množina skalárov, predpokladajme, že elementy tejto množiny vyhovujú týmto podmienkam (axiómam):

A. Každej dvojici $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ je priradený skalár $\alpha + \beta \in \mathcal{C}$ nazývaný súčet, pričom

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (komutatívny zákon).
2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (asociatívny zákon).
3. Existuje jednoznačne definovaný element 0 (nula) taký, že $\alpha + 0 = \alpha$.
4. Ku každému α existuje jednoznačne priradený skalár $-\alpha$ taký, že

$\alpha + (-\alpha) = 0$.

B. Každej dvojici skalárov $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ je priradený skalár $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{C}$ nazývaný <u>súčin</u>, pričom

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$ (komutatívny zákon).
2. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ (asociatívny zákon).
3. Existuje jednoznačný element 1 (jednotka) taký, že
   $1\alpha = \alpha$ (pre každé $\alpha \in \mathcal{C}$).
4. Ku každému $\alpha \neq 0$ existuje jednoznačne definovaný skalár $\alpha^{-1} (= 1/\alpha)$ taký, že
   $\alpha\alpha^{-1} = 1$.

C. Súčin je distributívny vzhľadom k súčtu,
$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

<u>Definícia.</u> Za predpokladu, že nad množinou skalárov $\mathcal{C}$ sú definované dve binárne operácie "súčet" a "súčin", pričom sú splnené sady axióm A–C, množina $\mathcal{C}$ sa nazýva <u>pole</u> <u>skalárov</u> (alebo jednoducho <u>pole</u>).

<u>Príklady.</u>

1. Dokážte pomocou axióm poľa skalárov tieto vzťahy

$$0 + \alpha = \alpha,$$
$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma,$$
$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta,$$
$$\alpha 0 = 0\alpha = 0,$$
$$(-1)\alpha = -\alpha,$$
$$(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta,$$
$$\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0 \vee (\alpha = 0 \wedge \beta = 0).$$

2. Nech $\mathcal{C}$ je množina všetkých celých čísel,
$\mathcal{C} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
pričom nad $\mathcal{C}$ je definovaný súčet a súčin obvyklým spôsobom. Je $\mathcal{C}$ pole?

3. Nech $\mathcal{C}$ je množina všetkých racionálnych čísel,

$$\mathcal{C} = \{ p/q \, ; \, p \text{ a } q \text{ sú cele nesúdeliteľné čísla} \},$$

pričom nad $\mathcal{C}$ je definovaný súčet a súčin obvyklým spôsobom. Je $\mathcal{C}$ pole?

4. Nech $\mathcal{C}$ je množina všetkých reálnych čísel tvaru $\alpha + \sqrt{2}\beta$, kde α a β sú racionálne čísla. Je $\mathcal{C}$ pole?

5. Nech $\mathcal{C}$ je množina všetkých polynómov s celočíselnými koeficientami,

$$\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots, x, 1+x, \dots, 1+x+x^2, \dots\}$$

pričom nad $\mathcal{C}$ je definovaný súčet a súčin obvyklým spôsobom. Je $\mathcal{C}$ pole?

Predpokladajme, že máme definované pole skalárov $\mathcal{F}$. Nech $V = \{\vec{a}, \vec{b}, \dots\}$ je množina vektorov. Nech elemnenty - vektory tejto množiny vyhovujú nasledujúcim podmienkam:

A. Každej dvojici $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je priradený vektor $\vec{x} + \vec{y} \in V$ nazývaný súčet, pričom

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutatívny zákon).
2. $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (asociatívny zákon).
3. Existuje jednoznačne definovaný vektor $\vec{0}$ (nulový vektor) taký, že $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (pre každé $\vec{x} \in V$)
4. Pre každé $\vec{x} \in V$ existuje jednoznačne vektor $-\vec{x} \in V$ taký, že $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

B. Každej dvojici $\alpha \in \mathcal{F}$ a $\vec{x} \in V$ je priradený vektor $\alpha\vec{x} \in V$ nazývaný súčin skalára s vektorom, pričom

1. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ (asociatívnosť súčinu).
2. $1\vec{x} = \vec{x}$ (pre každé $\vec{x} \in V$)

C. Distributívne zákony pre súčin skaláru s vektorom.

1. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$,
2. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$.

Definícia: Za predpokladu, že nad množinou vektorov V a poľom skalárov $\mathcal{F}$ sú definované operácie súčet vektorov a súčin skaláru s vektorom, pričom sú splnené sady A-C axióm, množinu V nazývame lineárny priestor nad poľom skalárov $\mathcal{F}$ (v mnohých prípadoch budeme používať skrátený termín "lineárny priestor" alebo len "priestor").

Príklady.

Dokážte pomocou axióm lineárneho priestoru tieto vzťahy:

$\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$,

$-\vec{0}=\vec{0}$,

$\alpha\vec{0}=\vec{0}$,

$-\vec{x}=(-1)\vec{x}$

$0\vec{x}=\vec{0}$,

pre každú dvojicu vektorov $\vec{x},\vec{y}\in V$ existuje také $\vec{a}\in V$, že $\vec{x}+\vec{a}=\vec{y}$

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{x} \Rightarrow \vec{y}=\vec{0}$,

$\alpha\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \alpha=0 \vee \vec{x}=\vec{0} \vee (\alpha=0 \wedge \vec{x}=\vec{0})$,

Terminologická poznámka.

1. Nech $\mathcal{F}$ je pole reálnych čísel, potom V je reálny lineárny priestor.

2. Nech $\mathcal{F}$ je pole komplexných čísel, potom V je komplexný lineárny priestor.

2.1. Príklady lineárnych priestorov.

1. Nech V je množina všetkých komplexných čísel a nech $\mathcal{F}$ je pole komplexných čísel. Operácie $\vec{x}+\vec{y}$ a $\alpha\vec{x}$ sú definované ako súčet a súčin dvoch komplexných čísel. Potom V je komplexný lineárny priestor.

2. Nech V je množina všetkých matíc typu (m,n) s komplexnými elementami a nech $\mathcal{F}$ je pole komplexných čísel,

$$V=\{\mathbb{A};\ t(\mathbb{A})=(m,n)\}.$$

Operácie súčtu dvoch matíc $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ a súčinu matice $\mathbb{A}$ s komplexným číslom nech sú definované obvyklým spôsobom,

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})_{ij}=(\mathbb{A})_{ij}+(\mathbb{B})_{ij},$$

$$(\alpha \mathbb{B})_{ij} = \alpha (\mathbb{B})_{ij} ,$$
$$(\mathbb{O})_{ij} = 0 ,$$
$$(-\mathbb{A})_{ij} = -(A_{ij}) .$$

Potom V je komplexný lineárny priestor.

3. Nech V je množina všetkých polynómov typu
$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n ,$$
kde t je komplexná premenná a $a_0, a_1, \dots, a_n$ sú komplexné koeficienty. Nech $\mathcal{F}$ je pole komplexných čísel. Operácie súčtu dvoch polynómoc a súčinu skaláru s polynómom nech sú definované obvyklým spôsobom. Potom V je komplexný lineárny priestor.

4. Nech V je množina všetkých usporiadaných n-tic komplexných čísel,
$$V = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\}$$
a nech $\mathcal{C}$ je pole komplexných čísel, potom $V = \mathcal{C}^n$. Definotoricky zavedieme operácie súčtu a súčinu a tiež vektor $\vec{0}$ a $-\vec{x}$. Nech $\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ a $\vec{y} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, potom
$$x + \vec{y} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n),$$
$$\alpha \vec{x} = (\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \dots, \alpha \xi_n) ,$$
$$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$$
$$-\vec{x} = (-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n) .$$
Ľahko sa presvedčíme, že axiómy A-C sú splnené, čiže V je komplexný lineárny priestor.

3. <u>Dimenzia lineárneho priestoru</u>

Nech V je lineárny priestor nad poľom skalárov $\mathcal{F}$. Vyberme z V n vektorov $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

<u>Definícia</u>. Konečná množina $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ vektorov z V sa nazýva <u>lineárne</u>

nezávislá, ak

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} ,$$

platí len pre $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \in \mathcal{F}$.

Poznámka. 1. Ak konečná množina $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ je lineárne závislá (čiže nie je lineárne nezávislá), potom vzťah

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

platí pre také koeficienty z ktorých aspoň jeden je nenulový.

2. Výraz $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$ sa nazýva lineárna kombinácia vektorov $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Príklady.

1. V je priestor polynómov, nech

$$\vec{x} = 1-t ,$$
$$\vec{y} = t-t^2 ,$$
$$\vec{z} = 1-t^2 .$$

Tieto vektory sú lineárne závislé, pretože $\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{0}$ ($\vec{0}$ je nulový polynóm, ktorého koeficienty sú rovné nule).

2. V je priestor polynómov, zvoľme si konečnú množinu vektorov definovaných takto

$$\vec{a}_1 = 1 ,$$
$$\vec{a}_2 = t ,$$
$$\vec{a}_3 = t^2 ,$$
$$\vdots$$
$$a_{n+1} = t^n ,$$

Táto množina je lineárne nezávislá, pretože

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n + \alpha_{n+1}\vec{a}_{n+1} = \vec{0}$$

platí len pre $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$.

3. V je lineárny priestor usporiadaných trojíc komplexných čísel, $V = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\}$. Vyberme si tri vektory

$$\vec{a}_1 = (1,0,1) , \quad \vec{a}_2 = (1,1,1) , \quad \vec{a}_3 = (0,1,1) .$$

Budeme študovať pre ktoré koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ platí

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(0,1,1) = \vec{0} = (0,0,0).$$

Táto vektorová rovnica produkuje tri skalárne rovnice

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \quad &= 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hodnoty koeficientov $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sú určené homogénnym systémom lineárnych rovníc. Vieme, že tento systém má nenulové riešenie vtedy a len vtedy, ak determinant matice koeficientov je nulový,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

To znamená, že systém má len triviálne - nulové riešenie $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Systém vektorov $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ je lineárne nezávislý.

Veta. Vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sú lineárne závislé vtedy a len vtedy, ak aspoň jeden vektor $\vec{a}_k$ $(1 \leq k \leq n)$ je lineárnou kombináciou ostatných vektorov.

Dôkaz. 1. Podmienka nutná, predpokladajme, že vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sú lineárne závislé, potom

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

platí pre $\alpha_k \neq 0$. Vektor $\vec{a}_k$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov

$$\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\vec{a}_n.$$

2. Podmienka postačujúca, nech $\vec{a}_k$ je vyjadrený ako lineárna kombinácia vektorov

$$\vec{a}_k = \beta_1 \vec{a}_1 + \ldots + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \beta_n \vec{a}_n.$$

Tento výraz možeme prepísať do tvaru

$$\beta_1 \vec{a}_1 + \ldots + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} - \vec{a}_k + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \beta_n \vec{a}_n = \vec{0},$$

kde aspoň jeden koeficient z ľavej strany je nenulový, čiže vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sú lineárne závislé.

Veta. Nech vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sú lineárne nezávislé, potom vektor $\vec{x}$ je vyjadrený jednoznačne ako lineárna kombinácia týchto vektorov.

Dôkaz. Predpokladajme, že vektor $\vec{x}$ je vyjadrený dvoma rôznymi spôsobmi,

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n,$$

$$\vec{x} = \beta_1 \vec{a}_1 + \ldots + \beta_n \vec{a}_n,$$

čiže platí

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \beta_1 \vec{a}_1 + \ldots + \beta_n \vec{a}_n ,$$

alebo

$$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{a}_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{a}_n = \vec{0} .$$

Pretože vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sú lineárne nezávislé, tento vzťah platí len nulové koeficienty $\alpha_i - \beta_i = 0$, alebo $\alpha_i = \beta_i$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Tým sme dokázali jednoznačnosť lineárnej kombinácie.

__Definícia.__ Lineárny priestor V je n-dimenzionálny, $dim(V) = n$, ak v ňom existuje práve n lineárne nezávislých vektorov.

__Príklady.__

1. Nech V je lineárny priestor usporiadaných n-tic komplexných čísel, $V = C^n$. Dokážte, že $dim(V) = n$.

2. Nech V je lineárny priestor polynómov maximálne stupňa n-tého,

$$V = \{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n\}.$$

Dokážte, že $dim(V) = n+1$.

__Definícia.__ Ľubovoľná množina n lineárne nezávislých vektorov z n-dimenzionálneho priestoru V, $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$, sa nazýva báza lineárneho priestoru V.

__Veta.__ Každý vektor $\vec{x}$ z n-dimenzionálneho lineárneho priestoru V možno jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov báze.

__Dôkaz.__ Nech $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ je báza V, ak k tejto množime pridáme vektor $\vec{x}$, dostaneme množinu obsahujúcu $n+1$ vektorov, čiže musí byť lineárne závislá,

$$\alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0} ,$$

pre $\alpha_0 \neq 0$, alebo

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\vec{a}_n .$$

Jednoznačnosť tejto lineárnej kombinácie vyplýva z predchádzajúcej vety.

Nech $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ je vybraná báza n-dimenzionálneho priestoru V, $dim(V) = n$, podľa poslednej vety každý vektor $\vec{x} \in V$ môžeme jednoznačne vyjadriť pomocou lineárnej kombinácie vektorov báze,

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n .$$

Koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazývame __súradnice__ vektora $\vec{x}$ v báze $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$. Poznamenajme, že súradnice daného vektora pre zvolenú bázu určujú vektor jednoznačne a sú vždy vztiahnuté k zvolenej báze.

Budeme študovať zmenu súradníc vektora pri prechode od jednej báze k druhej, tieto báze n-dimenzionálneho priestoru V sú

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\},$$

$$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}.$$

Nech $\vec{x} \in V$, potom

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{\ }_1 + \cdots + \alpha_n \vec{\ }_n = \beta_1 \vec{b}_1 + \cdots + \beta_n \vec{b}_n ,$$

kde koeficienty α_i (β_i) sú súradnice vektora $\vec{x}$ v báe $\{\vec{a}_i\}$ ($\{\vec{b}_i\}$).
Elementy báze $\{\vec{b}_i\}$ môžeme vyjadriť mocou báze $\{\vec{a}_i\}$,

$$\vec{b}_j = \xi_{1j}\vec{a}_1 + \cdots + \xi_{nj}\vec{a}_n .$$

Potom

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{k=1}^{n} \xi_{kj}\vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \xi_{kj}\beta_j \right\} \vec{a}_k ,$$

alebo

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i - \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\beta_j \right) \vec{a}_i = \vec{0}$$

Preťože $\{\vec{a}_i\}$ je báza, platí

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\beta_j . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Tento výraz zapíšeme pomocou maticového formalizmu v kompaktnom tvare, zavedieme stĺpcové vektore a maticu

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\vec{\alpha} = \underset{\sim}{\xi}\vec{\beta} .$$

Za predpokladu, že $\det(\underset{\sim}{\xi}) \neq 0$, existuje inverzná matica $\underset{\sim}{\xi}^{-1}$,

$$\vec{\beta} = \underset{\sim}{\xi}^{-1}\vec{\alpha} .$$

Tieto výsledky zhrnieme do nasledujúcej vety.

<u>Veta</u>: Súradnice vektora pri prechode od jednej báze k báze druhej sa transformujú podľa vzťahu

$$\vec{\alpha} = \underset{\sim}{\xi}\vec{\beta} .$$

4. Izomorfizmus

Nech $\mathcal{U}$ a V sú dva lineárne priestory a nech existuje 1-1 značné zobrazenie $\mathcal{U}$ na V,

$$f : \mathcal{U} \to V,$$

pričom

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \to f(\vec{a}_1) + f(\vec{a}_2).$$

K 1-1 značnému zobrazeniu definotoricky existuje inverzné zobrazenie

$$f^{-1} : V \to \mathcal{U},$$

pričom

$$\vec{y} = f(\vec{x}) \implies \vec{x} = f^{-1}(\vec{y}).$$

__Definícia__. Dve linárne priestory $\mathcal{U}$ a V sú __izomorfné__, ak medzi nimi existuje 1-1 značné zobrazenie $f : \mathcal{U} \to V$, pričom

$$f(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) = \alpha_1 f(\vec{a}_1) + \alpha_2 f(\vec{a}_2).$$

To znamená, že dva priestory a sú izomorfné, ak medzi nime existuje __izomorfizmus__, čo je 1-1 značné zobrazenie $f : \mathcal{U} \to V$ zachovávajúce lineárne vzťahy.

__Veta__. Dva priestory $\mathcal{U}$ a V sú izomorfné vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú dimenziu, $\dim(\mathcal{U}) = \dim(V)$.

__Dôkaz__. 1. Podmienka nutná, nech $\mathcal{U}$ a V sú izomorfné priestory, v priestore $\mathcal{U}$ zvolme bázu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$. Dokážeme, že vektory

$$\vec{b}_1 = f(\vec{a}_1),\ \vec{b}_2 = f(\vec{a}_2),\ \dots,\ \vec{b}_n = f(\vec{a}_n)$$

tvoria bázu priestoru V. Izomorfizmus zachováva nulový vektor (dokážte), lineárna kombinácia

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}_{\mathcal{U}}$$

je zobrazená na

$$f(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n) = f(\vec{0}_{\mathcal{U}}) = \vec{0}_V$$

alebo v inom tvare

$$\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n = \vec{0}_V,$$

čo platí tiež len pre $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. To znamená, že izomorfizmus zachováva lineárnu závislosť (alebo nezávislostť) vektorov. V priestore V teda existuje práve toľko lineárne nezávislých vektorov, ako v priestore $\mathcal{U}$, čiže priestory majú rovnakú dimenziu.

2. Podmienka postačujúca, nech $dim(U) = dim(V) = n$. Zvoľme si v U bázu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ a v V bázu $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$. Každý vektor $\vec{x} \in U$ je vyjadrený ako lineárna kombinácia elementov báze $\{\vec{a}_i\}$,

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n .$$

Definujme zobrazenie $f: U \to V$ takto

$$\vec{b}_i = f(\vec{a}_i) . \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Potom

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_1 .$$

Toto zobrazenie je 1-1 značné a $f(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) = \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \alpha_2 f(\vec{x}_2)$ (dokážte), čiže medzi U a V existuje izomorfizmus.

Dôsledok. Každý n-dimenzionálny priestor V definovaný nad poľom skalárov $\mathcal{F}$ je izomorfný s priestorom $\mathcal{F}^n = \{(\xi_1, \dots, \xi_n)\} = \mathcal{F} \times \dots \times \mathcal{F}$.

Poznámka. Pojem izomorfizmu medzi dvoma lineárnymi priestormi je veľmi dôležitý. Ukazuje, že nie je dôležité akým spôsobom je realizovaný daný lineárny priestor, jeho podstatným znakom je jeho dimenzia. Všetky vlastnosti špeciálneho priestoru V, kde $dim(V) = n$, platia automaticky aj pre ostatné priestory s rovnakou dimenziou.

5. Podpriestory

Nech V je lineárny priestor nad poľom skalárov $\mathcal{F}$ a nech V' je neprázdna podmnožina V, $V' \subset V$.

Definícia. Podmnožina $V' \subset V$ sa nazýva podpriestor lineárneho priestoru, ak každá lineárna kombinácia dvoch ľubovoľných vektorov z $\vec{x}, \vec{y} \in V'$ patrí tiež do V'.

Poznámka. Z tejto definície priamo vyplýva, že podpriestor V' lineárneho priestoru V je sám osebe lineárnym priestorom, obsahuje tiež nulový vektor $\vec{0}$.

Príklady.

1. Nech $V = \mathcal{F}^n$ je lineárny priestor tvorený z usporiadaných n-tic z poľa skalárov $\mathcal{F}$. Vytvorme podmnožinu $V' \subset V$,

$$V = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, 0, \dots, 0)\},$$

kde $m \leq n$. Množina V' je podpriestorom V .

2. Nech $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ je množina vektorov z n-dimenzionálneho priestoru V , $\dim(V) = n$. Nech V' je množina všetkých lineárnych kombinácií vektorov $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$,

$$V' = \{\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m\}.$$

V' je podpriestor lineárneho priestoru V , hovoríme, že je indukovaný množinou $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$, formálne

$$V' = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}.$$

Dimenzia tohto priestoru sa rovná počtu lineárne nezávislých vektorov v $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$,

$$1 \leq \dim(V') \leq p,$$

kde rovnosť $\dim(V') = p$ platí len v tom prípade, ak vektory $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ sú lineárne nezávislé. V limitnom prípade, ak $p = n$ a $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ sú lineárne nezávislé, t.j. tvoria bázu priastoru V , platí

$$V = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}.$$

Každý lineárny priestor je indukovaný svojou bázou.

Nech V_1 a V_2 sú podpriestory lineárneho priestoru, prienik týchto podpriestorov je definovaný

$$V_1 \cap V_2 = \{\vec{a};\ \vec{a} \in V_1 \wedge \vec{a} \in V_2\}.$$

Veta. Nech V_1 a V_2 sú podpriestory lineárneho priestoru V , potom ich prienik $V_1 \cap V_2$ je tiež podpriestor.

Dôkaz. Pretože V_1 a V_2 sú podpriestory, obsahujú nulový vektor, čiže $\vec{0} \in V_1 \cap V_2$. Vyberme dva vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ktoré $\vec{a}, \vec{b} \in V_1$ a $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$, potom tiež $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in V_1$ a $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in V_2$, čiže

$$\vec{a}, \vec{b} \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in V_1 \cap V_2.$$

Veta. Nech V' je podpriestor lineárneho priestoru V , potom

$$0 \leq \dim(V') \leq \dim(V),$$

rovnosť $\dim(V') = \dim(V)$ platí len vtedy, ak $V' = V$, a $\dim(V') = 0$ platí len pre $V' = \{\vec{0}\}$.

Definícia. Suma podpriestorov $V_1, V_2, \dots, V_p$ $(p < \infty)$

lineárneho priestoru V sa nazýva množina všetkých vektorov typu

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_p ,$$

kde $\vec{a}_i \in V_i$, pre $i = 1,2,\dots, p$. Túto sumu budeme označovať $V_1 + V_2 + \dots + V_p$.

<u>Veta.</u> Suma podpriestorov $V' = V_1 + V_2 + \dots + V_p$ lineárneho priestoru V je podpriestor.

<u>Dôkaz.</u> Vyberme si dva vektory $\vec{a}, \vec{b} \in V'$, potom

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_p \qquad (\vec{a}_i \in V_i \text{ pre } i = 1,2,\dots, p)$$

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots + \vec{b}_p \qquad (\vec{b}_i \in V_i \text{ pre } i = 1,2,\dots, p)$$

Nech $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ sú dva ľubovoľné skaláry, potom

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = (\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{b}_1) + (\alpha \vec{a}_2 + \beta \vec{b}_2) + \dots + (\alpha \vec{a}_p + \beta \vec{b}_p),$$

to znamená, že $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \in V'$, pretože $\alpha \vec{a}_i + \beta \vec{b}_i \in V_i$ (pre každé $i = 1,2,\dots, p$), to znamená, že suma podpriestorov je podpriestor.

Pre operáciu sumy podpriestorov bez dôkazu uvedieme tieto základné vlastnosti:

$$V_1 + V_2 = V_2 + V_1 ,$$

$$V_1 + (V_2 + V_3) = (V_1 + V_2) + V_3 ,$$

$$V_1 \subset V_2 \Rightarrow V_1 + V_2 = V_2 .$$

<u>Veta.</u> Dimenzia sumy $V_1 + V_2$ dvoch podpriestorov je

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

<u>Dôkaz.</u> Nech $\dim(V_1) = r_1$, $\dim(V_2) = r_2$ a $\dim(V_1 \cap V_2) = m$. V podpriestore $V_1 \cap V_2$ si zvolíme bázu $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\}$, potom

$$V_1 \cap V_2 = \operatorname{span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\}.$$

Pretože $V_1 \cap V_2 \subset V_1$ a $V_1 \cap V_2 \subset V_2$, bázu v podpriestoroch V_1 a V_2 môžeme zvoliť takto

$$V_1 = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\},$$

$$V_2 = \operatorname{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\},$$

kde $p + m = r_1$ a $q + m = r_2$. Potom pre $V_1 + V_2$ platí

$$V_1 + V_2 = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\},$$

alebo

$$\dim(V_1+V_2) = p+q+m = (p+m)+(q+m)-m$$
$$= r_1 + r_2 - m$$
$$= \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Definícia. Nech V_1 a V_2 sú podpriestory lineárneho priestoru V a nech prienik $V_1 \cap V_2$ obsahuje len nulový vektor, $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$, potom suma $V_1 + V_2$ sa nazýva priama suma podpriestorov V_1 a V_2, značí sa $V_1 \oplus V_2$.

Veta. Nech $V = V_1 \oplus V_2$, potom každé $\vec{a} \in V$ je jednoznačne vyjadrené vzťahom

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 ,$$

kde $\vec{a}_1 \in V_1$ a $\vec{a}_2 \in V_2$.

Dôkaz. Predpokladajme, že $\vec{a} \in V$ može byť vyjadrená dvoma spôsobmi

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 , \qquad \vec{a} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 ,$$

kde $\vec{a}_1, \vec{b}_1 \in V_1$ a $\vec{a}_2, \vec{b}_2 \in V_2$. Potom $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, čiže

$$\vec{a}_1 - \vec{b}_1 = \vec{b}_2 - \vec{a}_2 .$$

Pretože prienik $V_1 \cap V_2$ obsahuje len nulový vektor $\vec{0}$, z poslednej rovnosti dostávame $\vec{a}_1 - \vec{b}_1 = \vec{0} = \vec{b}_2 - \vec{a}_2$, čiže $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$ a $\vec{a}_2 = \vec{b}_2$.

Pre dimenziu priamej sumy platí

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) ,$$

pretože $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$.

5.1. Príklady.

1. Nájdite súradnice polynómu

$$f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

v nasledujúcich bázach

(a) $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$,

(b) $\{1, t-a, (t-a)^2, \dots, (t-a)^n\}$.

2. Nájdite maticu transformácie súradníc pri prechode od báze $\{1, t, \dots, t^n\}$ k báze $\{1, t-a, (t-a)^2, \dots, (t-a)^n\}$ v priestore polynómov stupňa maximálne

n-tého.

3. Rozhodnite, ktoré podmnožiny vektorov sú podpriestormi.

(a) Všetky vektory n-dimenzionálneho priestoru, ktorých súradnice sú celé čísla.

(b) Všetky vektory z $\mathcal{F}^n = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\}$, ktorých súradnice vyhovujú podmienke $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = 0$.

(c) Všetky vektory z $\mathcal{F}^n$, ktorých súradnice vyhovujú podmienke $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = 1$.

4. Dokáže, že ak $\dim(V_1) + \dim(V_2) > n$, kde V_1 a V_2 sú podpriestory lineárneho priestoru V, $\dim(V) = n$, potom prienik týchto podpriestorov $V_1 \cap V_2$ obsahuje aspoň jeden spoločný nenulový vektor.

5. Nech V_1 a V_2 sú podpriestory V a nech $V = V_1 \oplus V_2$. Dokážte, že ak $V_1 = span\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ a $V_2 = span\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$, potom $V = span\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_q\}$.

6. Dokážte, že pre každý podpriestor V_1 priestoru V je možné nájsť podpriestor V_2 taký, že $V = V_1 \oplus V_2$.

7. Máme zadané vektory $\vec{a}_1 = (1,1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (1,-1,1,2)$, $\vec{b}_1 = (-1,0,0,1)$, $\vec{b}_2 = (2,-1,0,0)$, nech $V_1 = span\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ a $V_2 = span\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Zostrojte podpriestor $V_1 \cap V_2$.

6. Skalárny súčin.

Nech V je lineárny priestor definovaný nad poľom skalárov $\mathcal{F}$.

Definícia. Skalárny súčin je usporiadaná binárna operácia definovaná nad V, ktorá každým dvom vektorom $\vec{x}, \vec{y} \in V$ priradí skalár $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{F}$, pričom

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*$,
2. $(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$,
3. $(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = (\vec{x}, \vec{y}_1) + (\vec{x} + \vec{y}_2)$,
4. $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ $\;(= 0$ len pri $\vec{x} = \vec{0})$.

Z axióm 1. a 2. vyplýva

$$(\alpha\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\alpha x)^* = \alpha^*(\vec{y},\vec{x})^* = \alpha^*(\vec{x},\vec{y}).$$

Podobne, z axióm 1. a 3. dostaneme

$$(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x}_1+\vec{x}_2)^* = (\vec{y},\vec{x}_1)^* + (\vec{y},\vec{x}_2)^*$$
$$= (\vec{x}_1,\vec{y}) + (\vec{x}_2,\vec{y}).$$

Skalárny súčin každého vektora s nulovým vektorom je vždy skalárna nula,

$$(\vec{0},\vec{x}) = (\vec{x},\vec{0}) = 0.$$

<u>Poznámka</u>. Ak v lineárnom priestore V nad poľom komplexných (reálnych) čísel je definovaný skalárny súčin, potom V sa nazýva <u>unitárny</u> (<u>euklidovský</u>) <u>lineárny priestor</u>.

<u>Príklad.</u> 1. Nech V je lineárny priestor usporiadaných n-tic komplexných čísel, $V = \mathbb{C}^n$. Vyberme si dva ľubovoľné vektory

$$\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$
$$\vec{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Potom skalárny súčin $(\vec{x},\vec{y})$ vyhovujúci axiómam 1.-4. z definície môže byť definovaný takto

$$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i .$$

2. Nech V je n-dimenzionálny lineárny priestor s bázou $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$, $V = \mathrm{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$. Ľubovoľné dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$ sú jednoznačne vajadrené pomocou elementov zvolenej báze,

$$\vec{x} = \xi_1\vec{x}_1 + \ldots + \xi_n\vec{x}_n \quad , \quad \vec{y} = \eta_1\vec{x}_1 + \ldots \eta_n \vec{x}_n .$$

Skalárny súčin môžeme definovať všeobecnejšie takto

$$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{ij=1}^{n} \xi_i^* \eta_j a_{ij} .$$

K tomu, aby boli splnené axiómy 1.-4. z definície, matica $A = (a_{ij})$ musí byť hermitovská a pozitívne definitná,

$$A^+ = A ,$$

$$(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{ij=1}^{n} \xi_i^* \xi_j a_{ij} \geq 0 ,$$

pre každý vektor $x \in V$, rovnosť platí len pre $\vec{x} = \vec{0}$.

3. V lineárnom priestore V polynómov premennej t, ktoré sú stupňa maximálne n-tého, skalárny súčin môže byť definovaný takto

$$(\vec{x},\vec{y}) = \int_a^b x^*(t)\, y(t)\, dt ,$$

kde $a<b$, $x(t)$ a $y(t)$ sú polynómy z priestora V .

Podľa axiómy 4. z definície skalárneho súčinu, veličina $(\vec{x},\vec{x})$ je nezáporná, čiže môžeme zaviesť jej odmocninu.

<u>Definícia</u>. <u>Dĺžka</u> vektora $\vec{x}\in V$ je definovaná

$$|\vec{x}| = +\sqrt{(\vec{x},\vec{x})} \; .$$

Vektor má nulovú dĺžku $|\vec{x}|=0$ len pre $\vec{x}=\vec{0}$. Pre vektor $\alpha\vec{x}$ platí

$$|\alpha\vec{x}| = |\alpha||\vec{x}| \; .$$

<u>Veta</u>. Pre každú dvojicu $\vec{x},\vec{y}\in V$ platí <u>Schwartzova</u> <u>nerovnosť</u>

$$|(\vec{x},\vec{y})| \leqslant |\vec{x}||\vec{y}| ,$$

pričom rovnosť platí len vtedy, ak vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ sú lineárne závislé (t.j. $\vec{x}=\alpha\vec{y}$).

<u>Dôkaz</u>. Podľa axiómy 4. z definície skalárneho súčinu platí

$$(\vec{x}-\lambda\vec{y},\, \vec{x}-\lambda\vec{y}) \geqslant 0 ,$$

alebo

$$(\vec{x},\vec{x}) - \lambda(\vec{x},\vec{y}) - \lambda^*(\vec{y},\vec{x}) + |\lambda|^2(\vec{y},\vec{y}) \geqslant 0 \, .$$

Za predpokladu, že $\vec{y}=\vec{0}$ dostaneme $(\vec{x},\vec{x})\geqslant 0$, čo je v súhlase s axiómou 4. Predpokladajme, že $\vec{y}\neq\vec{0}$, pretože λ je ľubovoľné komplexné číslo, položme

$$\lambda = \frac{(\vec{x},\vec{y})^*}{(\vec{y},\vec{y})} \, .$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$(\vec{x},\vec{y})(\vec{x},\vec{y})^* \leqslant (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) ,$$

alebo

$$|(\vec{x},\vec{y})| \leqslant |\vec{x}||\vec{y}| \, .$$

Predpokladajme, že $\vec{x}$ a $\vec{y}$ sú lineárne nezávislé, čiže $\vec{x}-\lambda\vec{y}\neq 0$, potom $(\vec{x}-\lambda\vec{y},\vec{x}-\lambda\vec{y})>0$. Opakovaním vyššie uvedeného dôkazu dostaneme

$$|(\vec{x},\vec{y})| < |\vec{x}||\vec{y}| \, .$$

Na záver predpokladajme, že $\vec{x}$ a $\vec{y}$ sú lineárne závislé, čiže $\vec{x}=\alpha\vec{y}$, kde $\alpha\neq 0$, potom

$$|(\vec{x},\vec{y})| = |(\alpha\vec{y},\vec{y})| = |\alpha||(\vec{y},\vec{y})| = |\alpha||\vec{y}||\vec{y}|$$
$$= |\vec{x}||\vec{y}| \, .$$

Izomorfizmus bol pôvodne definovaný pre lineárne priestory bez skalárneho súčinu, pre unitárne pristory musí byť špecifikovaný.

Definícia. Dva unitárne priestory $\mathcal{U}$ a V sú izomorfné, ak sú izomorfné v pôvodnom zmysle a izomorfizmus zachováva skalaárny súčin, čiže pre $\vec{y}_1 = f(\vec{x}_1)$ a $\vec{y}_2 = f(\vec{x}_2)$ platí

$$(\vec{y}_1, \vec{y}_2)_V = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)_{\mathcal{U}}.$$

Veta. Dva unitárne pristory $\mathcal{U}$ a V sú izomorfné vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú dimenziu, $\dim(\mathcal{U}) = \dim(V)$.

7. Ortogonálnosť vektorov

Definícia. Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ z unitárneho priestora V sú ortogonálne, keď

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Vlastnoť ortogonality je symetrická, ak vektor $\vec{x}$ je ortogonálny k $\vec{y}$, potom aj $\vec{y}$ je ortogonálny k $\vec{x}$, symbolicky

$$\vec{x} \perp \vec{y}.$$

Nulový vektor je ortogonálny k ľubovoľnému vektoru z daného unitárneho priestora. Množina vektorov $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ je ortogonálna, keď

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$$

pre každé $i \neq j = 1, 2, \dots, p$.

Definícia. Nenulový vektor $\vec{x}$ z unitárneho priestora V je normovaný, keď jeho dĺžka je jednotková,

$$|\vec{x}| = 1.$$

Táto podmienka je ekvivalentná s $(\vec{x}, \vec{x}) = 1$.

Systém nenulových vektorov $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ je ortonormálny, keď

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{pre } i = j), \\ 0 & (\text{pre } i \neq j). \end{cases}$$

Veta. Každá množina nenulových ortogonálnych vektorov z unitárneho priestora je lineárne nezávislá.

Dôkaz. Študujme lineárnu kombináciu

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

Skalárnym vynásobením tohto výrazu vektorom $\vec{x}_j$ ($1 \le j \le p$) dostaneme

$$\alpha_j (\vec{x}_j, \vec{x}_j) = 0,$$

pretože $(\vec{x}_j, \vec{x}_j) > 0$, platí $\alpha_j = 0$ (pre každé $1 \le j \le p$).

Věta. V každom n-dimenzionálnom unitárnom priestore existuje ortogonálna báza vektorov.

Dôkaz. Použijeme Schmidtov ortogonalizačný proces, dokážeme, že z ľubovoľnej množiny $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ lineárne nezávislých vektorov môžeme zostrojiť množinu ortogonálnych vektorov $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$. Proces ortogonalizácie rozdelíme do postupnosti krokov.

1. krok: $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$.

2. krok: $\vec{y}_2 = \alpha_1 \vec{y}_1 + \vec{x}_2$, koeficient α_1 určíme z podmienky $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_2$, čiže $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = 0$, dostaneme

$$\alpha_1 = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{x}_2)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)} .$$

Vektor $\vec{y}_2$ má potom tvar

$$y_2 = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{x}_2)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)} \vec{y}_1 + \vec{x}_2 .$$

3. krok: $\vec{y}_3 = \alpha_1 \vec{y}_1 + \alpha_2 \vec{y}_2 + \vec{x}_3$, koeficienty α_1 a α_2 určíme z podmienok $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_3$ a $\vec{y}_2 \perp \vec{y}_3$, potom

$$\alpha_1 = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)}, \quad \alpha_2 = -\frac{(\vec{y}_2, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_2, \vec{y}_2)} .$$

Vektor $\vec{y}_3$ je určený lineárnou kombináciou

$$\vec{y}_3 = -\frac{(\vec{y}_1, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_1, \vec{y}_1)} \vec{y}_1 - \frac{(\vec{y}_2, \vec{x}_3)}{(\vec{y}_2, \vec{y}_2)} \vec{y}_2 + \vec{x}_3 .$$

k-tý krok: $\vec{y}_k = \alpha_1 \vec{y}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \vec{y}_{k-1} + \vec{x}_k$, kde $\vec{y}_k \perp \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{k-1}$, čiže koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ majú hodnotu

$$\alpha_i = -\frac{(\vec{y}_i, \vec{x}_k)}{(\vec{y}_i, \vec{y}_i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

potom

$$\vec{y}_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\vec{y}_i, \vec{x}_k)}{(\vec{y}_i, \vec{y}_i)} \vec{y}_i + \vec{x}_k .$$

Naznačený postup opakujeme až pre $k=n$, tak dostaneme množinu ortogonálnych vektorov $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$. Z týchto vektorov normalizáciou dostaneme množinu ortonormálnych vektorov $\{\vec{y}_1', \vec{y}_2', \dots, \vec{y}_n'\}$, kde

$$\vec{y}_i' = \frac{\vec{y}_i}{|\vec{y}_i|} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Týmto sme dokončili konštruktívny dôkaz skutočnosti, že v každom n-dimenzionálnom unitárnom priestore existuje ortogonálna (alebo tiež aj ortonormálna) báza vektorov.

Nech V_1 je podpriestor unitárneho priestoru V, $V_1 \subset V$, pod $V_1^{\perp}$ rozumieme takú množinu vektorov, nazývanou <u>ortogonálny doplnok</u> (<u>komplement</u>) podpriestoru V_1, ktorej vektory sú ortogonálne k vektorom z V_1, formálne

$$V_1^{\perp} = \{\vec{x} \in V;\ \text{pre každé } \vec{y} \in V_1 : (\vec{x}, \vec{y}) = 0\}.$$

<u>Veta</u>. Ortogonálny doplnok $V_1^{\perp}$ je podpriestor unitárneho priestoru V.

<u>Dôkaz</u>. Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V_1^{\perp}$, potom pre každé $\vec{y} \in V_1$ platí

$$(\vec{x}_1, \vec{y}) = (\vec{x}_2, \vec{y}) = 0.$$

Vytvorme z vektorov $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ lineárnu kombináciu

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 .$$

Potom

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha_1^*(\vec{x}_1, \vec{y}) + \alpha_2^*(\vec{x}_2, \vec{y}) = 0,$$

čiže $\vec{x} \in V_1^{\perp}$, čím sme dokázali, že $V_1^{\perp}$ je podpriestor priestoru V.

<u>Veta</u>. Unitárny priestor V sa rovná priamej sume svojho podpriestoru V_1 a jeho ortogonálneho doplnku $V_1^{\perp}$,

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}.$$

<u>Dôkaz</u>. Nech podpriestór má ortogonálnu bázu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$, potom $V_1 = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$, $\dim(V_1) = p$. Túto bázu rozšírime na $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \dots, \vec{a}_n\}$ tak, aby bola bázou unitárneho priestora V, čiže $V = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$, $\dim(V) = n$. Použijeme analóg Schmidtovho ortogonalizačného procesu k tomu, aby aj vektory $\{\vec{a}_{p+1}, \dots, \vec{a}_n\}$ boli ortogonálne nielen medzi sebou ale aj vzhľadom k báze $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p\}$ podpriestoru V_1. Nech

$$\vec{b}_1 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p + \vec{a}_{p+1},$$

koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ určíme z podmienky $\vec{b}_1 \perp \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$, potom

$$\alpha_i = -\frac{(\vec{a}_i , \vec{a}_{p+1})}{(\vec{a}_i , \vec{a}_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

Analogicky zostrojíme vektor $\vec{b}_2$,

$$\vec{b}_2 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p + \beta_1 \vec{a}_1 + \vec{a}_{p+2} ,$$

kde $\vec{b}_2 \perp \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p, \vec{b}_1$, potom

$$\beta_1 = -\frac{(\vec{b}_1 , \vec{a}_{p+2})}{(\vec{b}_1 , \vec{b}_1)} , \quad \alpha_i = -\frac{(\vec{a}_i , \vec{a}_{p+2})}{(\vec{a}_i , \vec{a}_i)} \cdot (i = 1, 2, \dots, p)$$

Opakovaním tohto postupu zostrojíme vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_{n-p}$. Pretože tieto vektory sú ortogonálne, automaticky musia byť aj lineárne nezávislé, čiže aj $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-p}\}$ je báza unitárneho priestora V . Podpriestor $V_1^{\perp}$ teraz môžeme definovať ako

$$V_1^{\perp} = span\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_{n-p}\} ,$$

čiže

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}.$$

Poznámka. Pre ortogonálne doplnky podpriestorov unitárneho priestora V platia tieto ďalšie vlastnosti.

1. Nech V_1 je podpriestor, potom

$$(V_1^{\perp})^{\perp} = V_1 .$$

2. Nech V_1 a V_2 sú podpriestory, potom

$$(V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp} ,$$
$$(V_1 \oplus V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$$

3. Ortogonálny komplement V je

$$V^{\perp} = \{\vec{0}\} , \quad \{\vec{0}\}^{\perp} = V.$$

Príklad. Nech V 4-dimenzionálny priestor usporiadaných štvoríc reálnych čísel, jeho podpriestor V_1 nech je definovaný

$$V_1 = span\{\vec{a}_1 = (1,0,1,0) , \vec{a}_2 = (1,-1,0,1)\} .$$

Zostrojte bázu v $V_1^{\perp}$.

Pre každé $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in V_1^{\perp}$ musí platiť $\vec{a}_1 \perp \vec{x}$ a $\vec{a}_2 \perp \vec{x}$, čiže

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0 ,$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0 .$$

Položme $\alpha_3 = t_1$ a $\alpha_4 = t_2$, potom riešenie má tvar

$$\alpha_1 = -t_1 , \quad \alpha_2 = -t_1 + t_2 , \quad \alpha_3 = t_1 , \quad \alpha_4 = t_2 .$$

To znamená, že každý vektor $\vec{x} \in V_1^{\perp}$ môžeme vyjadriť linárnou kombináciou

$$\vec{x} = (-t_1, -t_1 + t_2, t_1, t_2) = t_1(-1,-1,1,0) + t_2(0,1,0,1)$$

čiže

$$V_1^{\perp} = span\{\vec{a}_3 = (-1,-1,1,0), \vec{a}_4 = (0,1,0,1)\}.$$

8. Operátory.

Definícia. Hovoríme, že nad lineárnym priestorom V máme definovaný operátor (zobrazenie) $\hat{A}$, ak každému $\vec{x} \in V$ máme priradený jednoznačne vektor $\vec{y} \in V$, formálne

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x}.$$

Priestor V sa nazýva obor definície operátora $\hat{A}$. Množina

$$im(A) = V_{\hat{A}} = \{\vec{y} \in V; \vec{y} = \hat{A}\vec{x} \text{ pre všetky } \vec{x} \in V\}$$

sa nazýva obor hodnôt operátora $\hat{A}$, pričom platí

$$V_{\hat{A}} \subset V.$$

Majme nad lineárnym priestorom definované dva operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$, tieto operátory sa rovnajú, $\hat{A} = \hat{B}$, ak pre každé $\vec{x} \in V$ platí

$$\hat{A}\vec{x} = \hat{B}\vec{x}.$$

Operátor $\hat{E}$ sa nazýva jednotkový nad V, ak pre každé $\vec{x} \in V$ platí

$$\hat{E}\vec{x} = \vec{x}.$$

Súčin dvoch operátorov $\hat{A}$ a $\hat{B}$, označený $\hat{A}\hat{B}$, je definovaný

$$(\hat{A}\hat{B})\vec{x} = \hat{A}(\hat{B}\vec{x}). \qquad \text{(pre každé } \vec{x} \in V \text{)}$$

Pre súčin operátorov platí asociatívny zákon,

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}.$$

To znamená, že môžeme zaviesť prirodzeno-číselnú mocninu operátora $\hat{A}$,

$$\hat{A}^m = \hat{A}\hat{A}\cdots\hat{A}$$

potom

$$\hat{A}^m \hat{A}^n = \hat{A}^{m+n} \qquad (m \text{ a } n \text{ sú prirodzené čísla})$$

Mocninu operátora môžeme zovšeobecniť aj pre nezáporné celé čísla, ak položíme $\hat{A}^0 = \hat{E}$ (jednotkový operátor).

Dva operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ <u>komutujú</u>, ak

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} .$$

V opačnom prípade ($\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$) hovoríme, že operátory <u>nekomutujú</u>. Ako príklad komutujúcich operátorov uveddieme vzťah

$$\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A} = \hat{A} ,$$

ktorý ľahko dokážeme priamo z definície jednotkového operátora a súčinu dvoch operátorov.

Operátor je <u>1-1 značný</u>, ak platí implikácia

$$\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \Rightarrow \hat{A}\vec{x}_1 \neq \hat{A}\vec{x}_2 ,$$

pre každú dvojicu rôznych vektorov $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$.

<u>Definícia</u>. Pre 1-1 značný operátor $\hat{A}$ existuje <u>inverzný</u> <u>operátor</u> $\hat{A}^{-1}$ taký, že

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = E .$$

<u>Veta</u>. Ku každému 1-1 značnému operátoru $\hat{A}$ existuje len jeden inverzný operátor $\hat{A}^{-1}$.

<u>Dôkaz</u>. Predpokladajme, že existujú dva operátory $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ také, že

$$\hat{A}\hat{B}_1 = \hat{B}_1\hat{A} = \hat{E} ,$$
$$\hat{A}\hat{B}_2 = \hat{B}_2\hat{A} = \hat{E} .$$

Vynásobme $\hat{A}\hat{B}_2 = \hat{E}$ zľava operátorom $\hat{B}_1$ a dostaneme $(\hat{B}_1\hat{A})\hat{B}_2 = \hat{B}_1 \Rightarrow$ $\hat{E}\hat{B}_2 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{B}_1 = \hat{A}^{-1}$, čo bolo treba dokázať.

Inverzný operátor k $\hat{A}^{-1}$ je $\hat{A}$,

$$(\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A} .$$

Tento vzťah vyplýva priamo z definície inverzného operátora. Predpokladajme, že $\hat{A}^{-1}$ je daný operátor a $\hat{A}$ je inverzný k $\hat{A}^{-1}$, čiže $(\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A}$.

Záporná celočíselná mocnina 1-1 značného operátora je definovaná

$$\hat{A}^{-m} = \hat{A}^{-1}\hat{A}^{-1} \ldots \hat{A}^{-1} .$$

Potom platí

$$(\hat{A}^n)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^n = \hat{A}^{-n} \,, \qquad (\, n \text{ je prirodzené číslo})$$

Pre inverzný operátor k súčinu dvoch operátorov $\hat{A}\hat{B}$ jednoducho odvodíme

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1},$$

kde $(\hat{A}\hat{B})(\hat{A}\hat{B})^{-1} = (\hat{A}\hat{B})\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} = \hat{A}(\hat{B}\hat{B}^{-1})\hat{A}^{-1} = \hat{A}\hat{E}\hat{A}^{-1} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$, podobne aj pre $(\hat{A}\hat{B})^{-1}(\hat{A}\hat{B}) = \hat{E}$.

9. Lineárne operátory

Definícia. Operátor $\hat{A}$ definovaný nad lineárnym priestorom V je lineárnym operátorom vtedy, ak

$$\hat{A}(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) = \alpha_1\hat{A}\vec{x}_1 + \alpha_2\hat{A}\vec{x}_2 \,,$$

kde α_1, α_2 sú komplexné čísla a $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sú ľubovoľné vektory z V .

Jednotkový operátor je lineárny,

$$\hat{E}(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \alpha_1\hat{E}\vec{x}_1 + \alpha_2\hat{E}\vec{x}_2 \,.$$

Lineárny operátor zobrazuje nulový vektor $\vec{0}$ na seba,

$$\hat{A}\hat{0} = \hat{A}(0\vec{x}) = 0\hat{A}\vec{x} = \vec{0}.$$

Predpokladajme, že v n-dimenzionálnom priestore V máme definovanú bázu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$. Budeme študovať pôsobenie lineárneho operátora $\hat{A}$ definovaného nad V na elementy zvolenej báze. Pretože $\hat{A}\vec{a}_i \in V$, vektor $\hat{A}\vec{a}_i$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov báze,

$$\hat{A}\vec{a}_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\,\vec{a}_k \,. \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Majme ľubovoľný vektor $\vec{x} \in V$,

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n \,,$$

nech platí $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$, kde

$$\vec{y} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_n\vec{a}_n \,.$$

Koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a $\beta_1, \dots, \beta_n$ sú súradnice vektorov $\vec{x}$ a $\vec{y}$, respektíve, v báze $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$. Pre $A\vec{x}$ platí

$$\hat{A}\vec{x} = \hat{A}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\hat{A}\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{k=1}^{n}A_{ki}\cdot\vec{a}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}A_{ki}\cdot\alpha_i\right\}\vec{a}_k = \vec{y} = \sum_{k=1}^{n}\beta_k\,\vec{a}_k$$

čiže

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{n}A_{ki}\cdot\alpha_i \qquad (k=1,2,\dots,\ n\ )$$

Podobne ako v kapitole 3, prepíšeme tento výraz do kompaktného tvaru pomocou maticového formalizmu,

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix},\quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix}A_{11}\cdots A_{1n}\\ \vdots \qquad \vdots\\ A_{n1}\cdots A_{nn}\end{pmatrix},$$

potom

$$\vec{\beta} = \mathbb{A}\vec{\alpha}.$$

Hovoríme, že lineárny operátor $\hat{A}$ je v priestore V s bázou $\{\vec{a}_1,\dots$ $\dots\vec{a}_n\}$ <u>reprezentovaný</u> <u>maticou</u> $\mathbb{A}=(A_{ij})$. Táto matica popisuje pôsobenie operátora $\hat{A}$ na elementy zvolenej báze $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n\}$.

Študujme problém, ako sa zmení matica $\mathbb{A}$ operátora $\hat{A}$ pri prechode od báze $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n\}$ k novej báze $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$. Nová báza je vztiahnutá k starej

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n}T_{ji}\,\vec{a}_j\,. \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

Pretože vektory z $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$ sú lineárne nezávislé (tvoria bázu), matica $\mathbb{T}=(T_{ij})$ je nesingulárna, čiže existuje inverzná matica $\mathbb{T}^{-1}=(T^{-1}_{ij})$, alebo

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{n}T^{-1}_{ij}\,\vec{b}_i\,. \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

Operátor $\hat{A}$ v báze $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n\}$ je reprezentovaný maticou $\mathbb{A}$, v báze $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$ je reprezentovaný maticou $\mathbb{B}$,

$$\hat{A}\vec{a}_i = \sum_{p=1}^{n}A_{pi}\,\vec{a}_p\ ,\quad \hat{A}\vec{b}_j = \sum_{q=1}^{n}B_{qj}\cdot\vec{b}_q\,.$$

Potom

$$\hat{A}\vec{b}_i = \hat{A}\sum_{j=1}^{n}T_{ji}\,\vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n}T_{ji}\,\hat{A}\,\vec{a}_j = \sum_{j,p=1}^{n}T_{ji}\,A_{pj}\,\vec{a}_p =$$

$$= \sum_{j,p,q=1}^{n} T_{ji} A_{pj} T^{-1}_{qp} \vec{b}_q$$

To znamená

$$B_{qi} = \sum_{p,j=1}^{n} T^{-1}_{qp} A_{pj} T_{ji} .$$

Matica $\mathbb{B}$ reprezentujúca operátor $\hat{A}$ v báze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ je zadaná

$$\mathbb{B} = \mathbb{T}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{T} .$$

Ak poznáme pôvodnú reprezentáciu operátora $\hat{A}$ a maticu $\mathbb{T}$ prechodu od starej báze k novej, môžeme zostrojiť pomocou tohto vzťahu novú reprezentáciu operátora $\hat{A}$ v báze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$.

<u>Determinant</u> <u>operátora</u> $\hat{A}$ definujeme pomocou determinantu jeho maticovej reprezentácie,

$$\det(\hat{A}) = \det(\mathbb{A}) .$$

Táto definícia determinantu operátora nezávisí od výberu báze, pretože

$$\det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T}) = \det(\mathbb{A}) .$$

<u>Stopa</u> <u>operátora</u> $\mathrm{Tr}(\hat{A})$ je definovaná pomocou stopy jeho maticovej reprezentácie

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} .$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade, platí

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) ,$$

čiže stopa operátora nezávisí od výberu konkrétnej báze.

Nad lineárnymi operátormi môžeme prevádzať rôzne operácie súčinu a súčtu, je dôležité mať zabezpečené, že aj tieto nové operátory sú leneárne.

<u>Veta</u>. Nech $\hat{A}$ a $\hat{B}$ sú lineárne operátory definované nad priestorom V, potom sú lineárne aj operátory $\hat{A}\hat{B}$, $\hat{A} \pm \hat{B}$, $\alpha\hat{A}$ a $\hat{A}^{-1}$ (za predpokladu, že $\hat{A}$ je 1-1 značný operátor).

<u>Dôkaz</u>. Súčin dvoch operátorov je lineárny operátor,

$$(\hat{A}\hat{B})(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) = \hat{A}[\hat{B}(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2)] =$$

$$= \hat{A}(\alpha_1\hat{B}\vec{a}_1 + \alpha_2\hat{B}\vec{a}_2) = \alpha_1(\hat{A}\hat{B})\vec{a}_1 + \alpha_2(\hat{A}\hat{B})\vec{a}_2 .$$

Súčet alebo rozdiel dvoch operátorov je lineárny operátor

$$(\hat{A} \pm \hat{B})(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) = \hat{A}(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) \pm \hat{B}(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) =$$

$$= \alpha_1 \hat{A}\vec{a}_1 + \alpha_2 \hat{A}\vec{a}_2 \pm \alpha_1 \hat{B}\vec{a}_1 \pm \alpha_2 \hat{B}\vec{a}_2 =$$
$$= \alpha_1 (\hat{A} \pm \hat{B})\vec{a}_1 + \alpha_2 (\hat{A} \pm \hat{B})\vec{a}_2 .$$

Dôkaz pre $\alpha\hat{A}$ je triviálny. Nech $\hat{A}$ je 1-1 značný lineárny operátor,

$$\hat{A}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) = \alpha_1 \hat{A}\vec{a}_1 + \alpha_2 \hat{A}\vec{a}_2 =$$
$$= \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2$$

kde $\vec{b}_1 = \hat{A}\vec{a}_1$ a $\vec{b}_2 = \hat{A}\vec{a}_2$. Potom

$$\hat{A}^{-1}(\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2) = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \alpha_1 \hat{A}^{-1}\vec{b}_1 + \alpha_2 \hat{A}^{-1}\vec{b}_2 ,$$

čo bolo treba dokázať.

Teraz môžeme pristúpiť k maticovej reprezentácii operátorov $\hat{A}\hat{B}$, $\hat{A} \pm \hat{B}$, $\alpha\hat{A}$ a $\hat{A}^{-1}$. Nech operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ sú v zvolenej báze reprezentované maticami $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$,

$\hat{A}\hat{B}$ je reprezentovaný maticou $\mathbb{A}\mathbb{B}$,
$\hat{A} \pm \hat{B}$ je reprezentovaný maticou $\mathbb{A} \pm \mathbb{B}$,
$\alpha\hat{A}$ je reprezentovaný maticou $\alpha\mathbb{A}$,
$\hat{A}^{-1}$ je reprezentovaný maticou $\mathbb{A}^{-1}$,

v zvolenej báze.

10. Hodnosť a defekt lineárnych operátorov

Nech $\hat{A}$ je lineárny operátor definovaný nad priestorom V. Obor hodnôt tohto operátora označíme $\operatorname{im}\hat{A}$, kde

$$\operatorname{im}\hat{A} = \{\vec{y} \in V ; \vec{y} = \hat{A}\vec{x} \text{ pre každé } \vec{x} \in V\} .$$

Jadro operátora $\hat{A}$ označíme $\ker\hat{A}$, kde

$$\ker\hat{A} = \{\vec{x} \in V ; \hat{A}\vec{x} = \vec{0}\} .$$

Veta. Obor hodnôt $\operatorname{im}\hat{A}$ je podpriestor lineárneho priestoru V.

Dôkaz. Nech $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \operatorname{im}\hat{A}$, potom existujú také dva vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$, že $\vec{y}_1 = \hat{A}\vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = \hat{A}\vec{x}_2$, čiže $\alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2 = \alpha_1\hat{A}\vec{x}_1 + \alpha_2\hat{A}\vec{x}_2 = \hat{A}(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) \in \operatorname{im}\hat{A}$.

Veta. Jadro operátora $\ker\hat{A}$ je podpriestor lineárneho priestoru V.

Dôkaz. Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \ker\hat{A}$, potom $\hat{A}\vec{x}_1 = \vec{0}$ a $\hat{A}\vec{x}_2 = \vec{0}$, alebo $\hat{A}(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) = \vec{0}$, čiže

$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2\in\ker\hat{A}$.

<u>Veta.</u> Lineárny operátor $\hat{A}$ definovaný nad priestorom V je 1-1 značný vtedy a len vtedy, ak $\hat{A}\vec{x}=\vec{0}$ platí len pre $\vec{x}=\vec{0}$ a ku každému $\vec{y}\in V$ existuje také $\vec{x}\in V$, že $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$.

<u>Dôkaz.</u> 1. Nech $\hat{A}$ je 1-1 značný operátor, potom $\vec{x}_1\neq\vec{x}_2 \Rightarrow \hat{A}\vec{x}_1\neq A\vec{x}_2 \Rightarrow$ $\hat{A}\vec{x}_1-\hat{A}\vec{x}_2\neq\vec{0}\Rightarrow\hat{A}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\neq\vec{0}$. Obrátením tejto implikácie dostaneme $A\vec{x}=\vec{0}$ len pre $\vec{x}=\vec{0}$, kde $\vec{x}=\vec{x}_1-\vec{x}_2$.

Nech $\hat{A}$ je 1-1 značný operátor a nech $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n\}$ je báza V, potom aj $\{\hat{A}\vec{a}_1,\hat{A}\vec{a}_2,\dots,\hat{A}\vec{a}_n\}$ je báza. Pretože $\alpha_1\hat{A}\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\hat{A}\vec{a}_n=\hat{A}(\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n)=\vec{0}$ platí len pre $\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$, čiže $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$. To znamená, že každý vektor $\vec{y}$ môže byť jednoznačne vyjadrený ako lineárna kombinácia báze $\{\hat{A}\vec{a}_1,\hat{A}\vec{a}_2,\dots,\hat{A}\vec{a}_n\}$, $\vec{y}=\sum\alpha_i\hat{A}\vec{a}_i=\hat{A}\sum\alpha_i\vec{a}_i=\hat{A}\vec{x}$, kde $\vec{x}=\sum\alpha_i\vec{a}_i$, čiže ku každému $\vec{y}$ existuje také $\vec{x}$, že $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$.

2. Nech $\hat{A}\vec{x}=\vec{0}$ platí len pre $\vec{x}=\vec{0}$ a pre každé $\vec{y}$ existuje také $\vec{x}$, že $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$. Zvolme si bázu $\{\vec{y}_1,\vec{y}_2,\dots,\vec{y}_n\}$, na základe predpokladu, že pre každé $\vec{y}_i$ existuje také $\vec{x}_i$, že $\vec{y}_i=\hat{A}\vec{x}_i$, dokážeme lineárnu nezávislosť vektorov $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$, ktoré teda tvoria bázu priestora V. To znamená, že každé $\vec{x}\in V$ je jednoznačne vyjadrené ako lineárna kombinácia $\alpha_1\vec{x}_1+\dots+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{x}$, pričom $\hat{A}\vec{x}=\vec{0}$ len pre $\vec{x}=\vec{0}$, t.j. operátor $\hat{A}$ je 1-1 značný operátor.

<u>Definícia.</u> <u>Hodnosť</u>, $r(\hat{A})$, a <u>defekt</u>, $d(\hat{A})$, lineárneho operátora $\hat{A}$ definovaného nad priestorom V sú určené

$$r(\hat{A})=\dim(\operatorname{im}\hat{A}),$$
$$d(\hat{A})=\dim(\ker\hat{A}).$$

<u>Veta.</u> Nech $\hat{A}$ je lineárny operátor definovaný nad priestorom V, potom jeho dimenzia je určená vzťahom

$$\dim V=r(\hat{A})+d(\hat{A}).$$

<u>Veta.</u> Lineárny operátor $\hat{A}$ je 1-1 značný vtedy a len vtedy, ak

$$d(\hat{A})=0,$$

t.j. podpriestor $\ker\hat{A}=\{\vec{0}\}$.

<u>Dôkaz.</u> 1. Nech $\hat{A}$ je 1-1 značný operátor, potom $\hat{A}\vec{x}=\vec{0}$ len pre $\vec{x}=\vec{0}$, čiže $\ker\hat{A}=\{\vec{0}\}$.

2. Nech $d(\hat{A})=0$, potom $dim(V)=r(\hat{A})$, pretože $im\,\hat{A}\subset V$, platí $V=im\,\hat{A}$. to znamená, že pre každé $\vec{y}\in V$ existuje také $\vec{x}\in V$, že $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$. Predpokladajme, že pre $\vec{y}\in V$ existujú dva vektory $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in V$ také, že $\hat{A}\vec{x}_1=\hat{A}\vec{x}_2=\vec{y}$, ovšem potom $\hat{A}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=\vec{0}$, čiže $\vec{x}_1-\vec{x}_2\in ker\,\hat{A}=\{\vec{0}\}$, dostaneme $\vec{x}_1=\vec{x}_2$. Pre $\vec{x}_1\neq\vec{x}_2$ platí teda $A\vec{x}_1\neq A\vec{x}_2$, $\hat{A}$ je 1-1 značný operátor.

<u>Veta.</u> Hodnosť operátora $\hat{A}$ a hodnosť jeho maticovej reprezentácie $\mathbb{A}$ v ľubovoľnej báze sa rovnajú,

$$r(\hat{A})=r(\mathbb{A}).$$

<u>Dôkaz.</u> $\hat{A}$ je lineárny operátor nad V, $dim(V)=n$, nech $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n\}$ je báza V. Potom

$$\hat{A}\vec{a}_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ji}\,\vec{a}_j\,,\quad (i=1,2,\dots,n) \qquad (*)$$

maticová reprezentácia $\hat{A}$ je $\mathbb{A}=(A_{ij})$. Podpriestor $im\,\hat{A}$ je určený

$$im\,\hat{A}=span\{\hat{A}\vec{a}_1,\hat{A}\vec{a}_2,\dots,\hat{A}\vec{a}_n\}.$$

Počet lineárne nezávislých vektorov v množine $\{\hat{A}\vec{a}_1,\hat{A}\vec{a}_2,\dots,\hat{A}\vec{a}_n\}$ sa rovná $r(A)=dim(im\hat{A})$. To znamená, že v $(*)$ je len $r(\hat{A})$ lineárne nezávislých vektorov, čo je rovné hodnosti matice $\mathbb{A}$.

11. <u>Invariantné podpriestory</u>

Nech $\hat{A}$ je lineárny operátor definovaný nad priestorom V a nech $\mathcal{U}$ je jeho podpriestor.

<u>Definícia.</u> Podpriestor $\mathcal{U}$ je <u>invariantný</u> (<u>stabilný</u>) vzhľadom k operátoru $\hat{A}$, ak

$$\vec{a}\in\mathcal{U}\Rightarrow\hat{A}\vec{a}\in\mathcal{U},$$

formálne $\hat{A}\mathcal{U}=\mathcal{U}$.

Nech operátor $\hat{A}$ má netriviálny invariantný podpriestor $\mathcal{U}_1$, $\hat{A}\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_1$, a bázou $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_m\}$, $\mathcal{U}_1=span\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_m\}$, $dim(\mathcal{U}_1)=m$. Priestor V, nad ktorým je operátor $\hat{A}$ definovaný, môže mať bázu $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_m,\vec{a}_{m+1},\dots,\vec{a}_n\}$, dim $dim(V)=n$, platí $m\leq n$. Zavedieme maticovú reprezentáciu $\mathbb{A}=(A_{ij})$ operátora A,

$$\hat{A}\vec{a}_i=\sum_{j=1}^{m}A_{ji}\vec{a}_j\ ,\qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$\hat{A}\vec{a}_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ji}\vec{a}_j\qquad (i=m+1,\dots,n)$$

To znamená, že matica $\mathbb{A}$ má štruktúru

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_1 & \mathbb{B}\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

kde $typ(\mathbb{A}_1)=(m,m)$, $typ(\mathbb{B})=(m,n-m)$ a $typ(A_2)=(n-m,n-m)$.

Hovoríme, že operátor $\hat{A}$ indukuje v invariantnom podpriestore $\mathcal{U}_1$ nový operátor $\hat{A}_1$,

$$\hat{A}\vec{x}=\hat{A}_1\vec{x}\ ,$$

pre každé $\vec{x}\in\mathcal{U}_1$. Operátor $\hat{A}_1$ má maticovú reprezentáciu $\mathbb{A}_1$.

Študujme priamu sumu invariantných podpriestorov

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2\ ,$$

kde $\hat{A}\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_1$ a $\hat{A}\mathcal{U}_2=\mathcal{U}_2$. Nech podpriestor $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ majú báze $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_m\}$ a $\{\vec{a}_{m+1},\dots,\vec{a}_n\}$, respektíve; priestor $\mathcal{U}$ má potom bázu $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_m,\dots,\vec{a}_n\}$. Maticová reprezentácia operátora $\hat{A}$ v tejto báze má blokovo-diagonálnu štruktúru,

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_1 & 0\\ 0 & \mathbb{A}_2\end{pmatrix}.$$

Nech $\hat{A}_1$ a $\hat{A}_2$ sú operátory indukované operátorom $\hat{A}$ v podpriestoroch $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$, respektíve,

$$\vec{x}\in\mathcal{U}_1\Rightarrow\hat{A}\vec{x}=\hat{A}_1\vec{x}\ ,$$

$$\vec{x}\in\mathcal{U}_2\Rightarrow\hat{A}\vec{x}=\hat{A}_2\vec{x}\ .$$

Operátory $\hat{A}_1$ a $\hat{A}_2$ majú v danej báze maticovú reprezentáciu $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_2$.

Prevedieme zovšeobecnenie týchto úvah, nech

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2\oplus\dots\oplus\mathcal{U}_s\ ,$$

kde

$$\hat{A}\mathcal{U}_i=\mathcal{U}_i\qquad (i=1,2,\dots,s)$$

Zvolme v každom podpriestore $\mathcal{U}_1$ bázu, priestor $\mathcal{U}$ má potom bázu, ktorá vznikne zjednotením týchto báz, maticová reprezentácia operátora $\hat{A}$ má potom tvar

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix},$$

kde A_i je maticová reprezentácia operátora $\hat{A}_i$ indukovaného operátorom $\hat{A}$ v podpriestore $\mathcal{U}_i$.

12. <u>Projekčné operátory</u>

$\mathcal{U}_2 = \{0\}$

Nech lineárny priestor $\mathcal{U}$ je priama suma podpriestorov $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. To znamená, že každé $\vec{x} \in \mathcal{U}$ môžeme jednoznačne vajadriť takto

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 ,$$

kde $\vec{x}_1 \in \mathcal{U}_1$ a $\vec{x}_2 \in \mathcal{U}_2$.

<u>Definícia</u>. Operátor $\hat{P}$ sa nazýva <u>projekčný</u> <u>operátor</u> (<u>projektor</u>) na podpriestor $\mathcal{U}_1$ vtedy, ak

$$\hat{P}\vec{x} = \vec{x}_1 ,$$

pre každé $\vec{x} \in \mathcal{U}$.

Projektor $\hat{P}$ je lineárny operátor. Nech $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ a $\vec{x}' = \vec{x}_1' + \vec{x}_2'$, kde $\vec{x}_1, \vec{x}_1' \in \mathcal{U}_1$ a $\vec{x}_2, \vec{x}_2' \in \mathcal{U}_2$, potom $\hat{P}(\vec{x} + \vec{x}') = \vec{x}_1 + \vec{x}_1' = \hat{P}\vec{x} + \hat{P}\vec{x}'$.

<u>Veta</u>. Operátor $\hat{P}$ je projektorom vtedy a len vtedy, ak idempotentný, $\hat{P}^2 = \hat{P}$.

<u>Dôkaz</u>. 1. Operátor $\hat{P}$ je projektor na $\mathcal{U}_1$, potom pre každé $\vec{x} \in \mathcal{U}$ platí
$\hat{P}^2\vec{x} = \hat{P}(\hat{P}\vec{x}) = \hat{P}\vec{x}_1 = \vec{x}_1 = \hat{P}\vec{x}$, čiže $\hat{P}^2 = \hat{P}$.

2. Predpokladajme, že $\hat{P}$ je lineárny operátor vyhovujúci podmienke idempotentnosti $\hat{P}^2 = \hat{P}$, nech je definovaný nad priestorom $\mathcal{U}$. Definujme podpriestory $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ takto

$$\mathcal{U}_1 = \{ \vec{x} \in \mathcal{U} ; \hat{P}\vec{x} = \vec{x} \} ,$$

$$\mathcal{U}_2 = \{ \vec{x} \in \mathcal{U} ; \hat{P}\vec{x} = \vec{0} \} = \ker \hat{P}.$$

Dokážeme, že $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\vec{0}\}$. Nech $\vec{y} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, potom $\hat{P}\vec{y} = \vec{y}$ a $\hat{P}\vec{y} = \vec{0}$, toto platí len pre $\vec{y} = \vec{0}$, čiže $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\vec{0}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, každé $\vec{x} \in \mathcal{U}$ môžeme vyjadriť ako $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, kde $\vec{x}_1 \in \mathcal{U}_1$ a $\vec{x}_2 \in \mathcal{U}_2$, $\vec{x} = (\hat{E} - \hat{P} + \hat{P})\vec{x} = (\hat{E} - \hat{P})\vec{x} + \hat{P}\vec{x}$. Položíme $\vec{x}_1 = \hat{P}\vec{x}$ a $\vec{x}_2 = (\hat{E} - \hat{P})\vec{x}$, potom $\hat{P}\vec{x}_1 = \hat{P}^2\vec{x} = \hat{P}\vec{x} = \vec{x}_1$, $\hat{P}\vec{x}_2 = \hat{P}(\hat{E} - \hat{P})\vec{x} = (\hat{P} - \hat{P}^2)\vec{x} = \vec{0}$. To znamená, že $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. Tým sme dokázali, že lineárny idempotentný operátor má vlastnosti projektora, $\hat{P}\vec{x} = \vec{x}_1 \in \mathcal{U}_1$.

Veta. Lineárny operátor $\hat{P}$ je projektor vtedy a len vtedy, ak $\hat{E} - \hat{P}$ je projektorom. Keď $\hat{P}$ je projektor na $\mathcal{U}_1$, potom $\hat{E} - \hat{P}$ je projektor na $\mathcal{U}_2$.

Dôkaz. 1. Nech $\hat{P}$ je projektor na $\mathcal{U}_1$, potom je idempotentný, čiže

$$(\hat{E} - \hat{P})^2 = \hat{E} - \hat{P} - \hat{P} + \hat{P}^2 = \hat{E} - \hat{P},$$

$$(\hat{E} - \hat{P})\vec{x} = \vec{x} - \hat{P}\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{x}_2 .$$

2. Nech $\hat{E} - \hat{P}$ je projektor na $\mathcal{U}_2$, potom úplne analogicky dokážeme, že $\hat{P}$ je projektor na $\mathcal{U}_1$.

Nech $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ a $\hat{P}$ je projektor na $\mathcal{U}_1$, potom $\hat{E} - \hat{P}$ je projektor na $\mathcal{U}_2$. Zavedieme označenie

$$\hat{P}_1 = \hat{P}, \quad \hat{P}_2 = \hat{E} - \hat{P}.$$

Potom platí

$$(1) \quad \hat{P}_1 + \hat{P}_2 = \hat{E},$$

$$(2) \quad \hat{P}_i \hat{P}_j = \hat{P}_j \hat{P}_i = \delta_{ij} \hat{P}_i, \quad (i, j = 1, 2)$$

kde $\delta_{ij} = 1$ pre $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pre $i \neq j$.

Pomocou projektorov môžeme vhodne vyjadriť aj pojem invariantnosti podpriestoru vzhľadom k lineárnemu operátoru $\hat{A}$. Nech $\mathcal{U}_1$ je invariantný podpriestor vzhľadom k $\hat{A}$, $\hat{A}\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1$. Potom existuje taký podpriestor $\mathcal{U}_2$, že $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\vec{0}\}$ a $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. Nech $\hat{P}_1$ a $\hat{P}_2$ sú projektory na $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$, respektíve.

Veta. $\mathcal{U}_1$ je invariantný podpriestor vzhľadom k operátoru $\hat{A}$ vtedy a len vtedy, ak

$$\hat{P}_1 \hat{A} \hat{P}_1 = \hat{A} \hat{P}_1 .$$

Nech $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ je priama suma dvoch invariantných podpriestorov, $\hat{A}\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1$ a $\hat{A}\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2$. Nech $\hat{P}_1$ je projektor na $\mathcal{U}_1$ a $\hat{P}_2$ je projektor na $\mathcal{U}_2$. Potom operátor $\hat{A}$ komutuje s projektormi $\hat{P}_1$ a $\hat{P}_2$,

$$\hat{A}\hat{P}_1 = \hat{P}_1\hat{A} \quad , \quad \hat{A}\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{A} .$$

Použitím poslednej vety a týchto výsledkov dostaneme, že operátor $\hat{A}$ má tvar

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 ,$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}\hat{P}_1 \quad , \quad \hat{A}_2 = \hat{A}\hat{P}_2 ,$$

kde $\hat{A}_1$ je indukovaný operátor operátorom $\hat{A}$ v invariantnom podpriestore $\mathcal{U}_1$, podobne $\hat{A}_2$ je indukovaný $\hat{A}$ v $\mathcal{U}_2$.

Pristúpime ku konštrukcii maticovej reprezentácie projektoru $\hat{P}$ na $\mathcal{U}_1$. Nech $\mathcal{U}_1$ má bázu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$, ktorá môže byť doplnená na bázu celého priestora $\mathcal{U}$, $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \dots, \vec{a}_n\}$, kde

$$\hat{P}\vec{a}_i = \vec{a}_i \quad , \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$\hat{P}\vec{a}_i = \vec{0} \quad . \qquad (i = p+1, \dots, n)$$

V tejto báze je projektor $\hat{P}$ reprezentovaný maticou

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Potom $Tr(\hat{P}) = Tr(\mathbb{P}) = dim(\mathcal{U}_1) = p$, tým sme dokázali, že stopa maticovej reprezentácie projektora $\hat{P}$ a teda aj stopa samotného projektora sa rovná

$$Tr(\hat{P}) = dim(\mathcal{U}_1) ,$$

čo je explicitný výraz pre dimenziu podpriestora.

13. Hermitovsky združený operátor

Nech $\hat{A}$ je lineárny operátor definovaný nad unitárnym priestorom $\mathcal{U}$.

Definícia. Operátor $\hat{A}^+$ sa nazýva hermitovsky združený operátor k $\hat{A}$, ak pre každé dva $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}$ platí

$$(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y}) .$$

Veta. $\hat{A}^+$ je lineárny operátor definovaný nad $\mathcal{U}$.

Dôkaz. Pre skalárny súčin $(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$ platia tieto dva alternatívne vzťahy

$$(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = (\vec{x}, \hat{A}^+(\vec{y}_1 + \vec{y}_2)) ,$$

$$\begin{aligned}(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= (\hat{A}\vec{x}, \vec{y}_1) + (\hat{A}\vec{x}, \vec{y}_2) \\ &= (\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y}_1) + (\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y}_2) \\ &= (\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y}_1 + \hat{A}^+\vec{y}_2) .\end{aligned}$$

Čiže platí

$$(\vec{x}, \hat{A}^+(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) - \hat{A}^+\vec{y}_1 - \hat{A}^+\vec{y}_2) = 0 ,$$

pre každé $\vec{x} \in \mathcal{U}$. Toto môže nastať len ak druhá komponenta skalárneho súčinu je nulový vektor $\vec{0}$,

$$\hat{A}^+(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \hat{A}^+\vec{y}_1 + \hat{A}^+\vec{y}_2 .$$

Tým sme dokázali, že $\hat{A}^+$ je lineárny operátor.

Veta. Nech operátor $\hat{A}$ v ortonormálnej báze je reprezentovaný maticou $\mathbb{A}$, potom v tejto báze je operátor $\hat{A}$ reprezentovaný maticou $\mathbb{A}^+$, kde $(\mathbb{A}^+)_{ij} = A^*_{ji}$ (hovoríme, že matica $\mathbb{A}^+$ je hermitovsky združená k matici $\mathbb{A}$).

Dôkaz. Nech v unitárnom priestore máme definovanú ortonormálnu bázu $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$. Operátor $\hat{A}$ je reprezentovaný v tejto báze maticou $\mathbb{A} = (A_{ij})$,

$$\hat{A}\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\vec{x}_j . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Pretože báza je ortonormálna, maticové elementy A_{ji} sú určené vzťahom

$$A_{ji} = (\vec{x}_j, \hat{A}\vec{x}_i) .$$

Nech operátor $\hat{A}^+$ je reprezentovaný maticou $\mathbb{B} = (B_{ij})$,

$$\hat{A}^+\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ji}\vec{x}_j ,$$

kde

$$B_{ji} = (\vec{x}_j, \hat{A}^+\vec{x}_i) .$$

Pretože $B_{ji} = (\vec{x}_j, \hat{A}^+\vec{x}_i) = (\hat{A}\vec{x}_j, \vec{x}_i) = (\vec{x}_i, \hat{A}\vec{x}_j)^* = A^*_{ij}$, dokázali sme, že $\mathbb{B} = \mathbb{A}^+$.

Veta. $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$.

Dôkaz. Pre skalárny súčin $(\hat{A}\hat{B}\vec{x}, \vec{y})$ platia tieto dva alternatívne výrazy

$$(\hat{A}\hat{B}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, (\hat{A}\hat{B})^+\vec{y}),$$

$$(\hat{A}\hat{B}\vec{x}, \vec{y}) = (\hat{B}\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y}) = (\vec{x}, \hat{B}^+\hat{A}^+\vec{y}),$$

čiže platí

$$(\vec{x}, (\hat{A}\hat{B})^{+}\vec{y} - \hat{B}^{+}\hat{A}\vec{y}) = 0,$$

alebo

$$(\hat{A}\hat{B})^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}.$$

Veta. Ak $\hat{A}$ je 1-1 značný operátor, potom aj $\hat{A}^{+}$ je 1-1 značný operátor.

Dôkaz. Z 1-1 značnosti operátora $\hat{A}$ vyplýva, že pre každé $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí $\hat{A}\vec{x} \neq \vec{0}$, alebo $(\vec{x}, \hat{A}\vec{x}) \neq 0$, potom $(\hat{A}^{+}\vec{x}, \vec{x}) \neq 0$ pre každé $\vec{x} \neq \vec{0}$. To znamená, že tiež platí $\hat{A}^{+}\vec{x} \neq \vec{0}$, operátor $\hat{A}^{+}$ je 1-1 značný.

Veta. Nech $\hat{A}$ je 1-1 značný operátor s inverzným operátorom $\hat{A}^{-1}$, potom

$$(\hat{A}^{+})^{-1} = (\hat{A}^{-1})^{+}.$$

Dôkaz. Inverzný operátor je definovaný vzťahom

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = E$$

alebo

$$(\hat{A}^{-1})^{+}\hat{A}^{+} = \hat{A}^{+}(\hat{A}^{-1})^{+} = \hat{E}^{+} = E.$$

To znamená, že $(\hat{A}^{-1})^{+} = (\hat{A}^{+})^{-1}$.

Pre hermitovsky združený operátor platia tieto relácie

$$(\hat{A}^{+})^{+} = \hat{A},$$

$$(\hat{A} \pm \hat{B})^{+} = \hat{A}^{+} \pm \hat{B}^{+},$$

$$(\alpha\hat{A})^{+} = \alpha^{*}\hat{A}^{+}.$$

Pomocou pojmu hermitovsky združeného operátora definujú sa tieto špeciálne typy operátorov:

1. Hermitovský operátor, $\hat{A}^{+} = \hat{A}$.
2. Unitárny operátor, $\hat{A}\hat{A}^{+} = \hat{A}^{+}\hat{A} = \hat{E}$, alebo $\hat{A}^{+} = \hat{A}^{-1}$.
3. Normálny operátor, $\hat{A}\hat{A}^{+} = \hat{A}^{+}\hat{A}$.
4. Antihermitovský operátor, $\hat{A}^{+} = -\hat{A}$.

14. Charakteristický problém

Nech $\hat{A}$ je lineárny operátor definovaný nad n-dimenzionálnym komplexným priestorom V. Charakteristický problém pre operátor $\hat{A}$ má tvar

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda \vec{x} ,$$

kde $\vec{x}$ je nenulový vektor nazývaný charakteristický vektor a λ je komplexné číslo nazývané charakteristická hodnota.

Zvoľme si v priestore V bázu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$, nech maticová reprezentácia operátora $\hat{A}$ v tejto báze je $\mathbb{A}$. Charakteristický vektor $\vec{x} \in V$ v zvolenej báze má tvar

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n .$$

Maticová reprezentácia charakteristického problému má potom tvar

$$\mathbb{A}\vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} ,$$

kde $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ je stĺpcový vektor súradníc vektora $\vec{x}$. Maticová reprezentácia charakteristického problému môže byť prepísaná do ekvivalentného tvaru

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E})\vec{\alpha} = \vec{0} ,$$

kde $\mathbb{E}$ je jednotková matica. Súradnice charakteristického vektora $\vec{\alpha}$ sú určené ako riešenie homogénneho problému, pretože nás zaujíma len netriviálne riešenie $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, determinant koeficientov homogénneho systému musí byť nulový

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}) = 0 .$$

Rozvojom tohto determinantu dostaneme sekulárnu rovnicu matice $\mathbb{A}$,

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 ,$$

kde napr. $a_0 = (-1)^n$ a $a_n = \det(\mathbb{A})$. Sekulárna rovnica je invariantná vzhľadom k výberu báze v priestore V, nech v novej báze je operátor $\hat{A}$ reprezentovaný maticou $\mathbb{B} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T}$, matica $\mathbb{T}$ je transformačná matica prechodu od starej báze k novej. Sekulárna rovnica matice $\mathbb{B}$ má tvar

$$\det(\mathbb{B} - \lambda \mathbb{E}) = \det(\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T} - \lambda \mathbb{E}) = \det(\mathbb{T}^{-1}(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E})\mathbb{T})$$
$$= \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}).$$

Tým sme dokázali, že koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ sekulárnej rovnice sú invariantné vzhľadom k výberu báze, čiže môžu byť priamo vztiahnuté k operátoru $\hat{A}$.

<u>Veta</u>. Každý lineárny operátor $\hat{A}$ má aspoň jednu charakteristickú hodnotu λ a k nej prislúchajúci charakteristický vektor $\vec{x}$, $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

<u>Dôkaz</u>. Ako vyplýva z predchádzajúcej diskusie, charakteristické hodnoty operátora $\hat{A}$ sú určené ako korene sekulárnej rovnice. Podľa Gaussovej základnej vety algebry, každá algebraická rovnica (sekulárna rovnica je algebraickou rovnicou) má v obore komplexných čísel aspoň jeden koreň. To znamená, že sekulárna rovnica má tiež aspoň jeden koreň, čiže operátor $\hat{A}$ má aspoň jednu charakteristickú hodnotu. Dosadením tejto charakteristickej hodnoty do homogénneho problému a jeho riešením získame príslušný charakteristický nenulový vektor.

Charakteristický polynóm môže byť prepísaný do tvaru.

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\dots(\lambda-\lambda_p)^{n_p}=0$$

kde $n_1, n_2, \dots, n_p$ sú prirodzené čísla obmedzené podmienkou

$$n_1+n_2+\dots+n_p=n \ .$$

Veličiny $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sú charakteristické hodnoty, ich multiplicita je popísaná číslami $n_1, n_2, \dots, n_p$. Hovoríme, že charakteristická hodnota λ_i má multiplicitu n_i . Ak $n_i=1$, potom charakteristická hodnota λ_i je <u>nedegenerovaná</u>, v opačnom prípade je <u>degenerovaná</u>.

<u>Veta</u>. Nech operátor $\hat{A}$ má dve charakteristické vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ priradené dvom rôznym charakteristickým hodnotám λ_1 a λ_2 (t.j. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\hat{A}\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$ a $\hat{A}\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$), potom vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ sú lineárne nezávislé.

<u>Dôkaz</u>. Študujme lineárnu kombináciu $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2=\vec{0}$, jej postupným vynásobením zľava operátormi $(\hat{A}-\lambda_1\hat{E})$ a $(\hat{A}-\lambda_2\hat{E})$ dostaneme, že $\alpha_1=0$ a $\alpha_2=0$, čiže vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ sú lineárne nezávislé.

<u>Veta</u>. Nech $\hat{A}$ a $\hat{B}$ sú komutujúce lineárne operátory definované nad priestorom V , $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$, potom množina charakteristických vektorov operátora $\hat{A}$ priradených charakteristickej hodnote λ ,

$$R_\lambda=\{\vec{x}\in V,\ \hat{A}\vec{x}=\lambda\vec{x}\},$$

tvorí podpriestor invariantný vzhľadom k operátoru $\hat{B}$.

<u>Dôkaz</u>. Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in R_\lambda$, potom $\hat{A}(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2)=\lambda(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2)$, čiže $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2\in R_\lambda$, tým sme dokázali, že množina R_λ je podpriestor. Nech $\vec{x}\in R_\lambda$, $\hat{A}\vec{x}=\lambda\vec{x}$, vynásobením zľava tohto charakteristického problému operátorom $\hat{B}$ dostaneme $\hat{B}\hat{A}\vec{x}=\hat{A}\hat{B}\vec{x}=\lambda\hat{B}\vec{x}$, to znamená, že $\hat{B}\vec{x}$ je charakteris-

tickým vektorom $\hat{A}$ s charakteristickou hodnotou λ, čiže $\hat{B}\vec{x} \in R_\lambda$.

Veta. Komutujúce operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ majú aspoň jeden spoločný charakteristický vektor.

Dôkaz. Podľa predchádzajúcej vety platí $\hat{B} R_\lambda = R_\lambda$, čiže podpriestor R_λ je invariantný vzhľadom k operátoru $\hat{B}$. To znamená, že operátor $\hat{B}$ indukuje v podpriestore R_λ operátor $\hat{B}_1$, pričom $\hat{B}_1$ je lineárny operátor definovaný nad podpriestorom R_λ. Vieme, že každý lineárny operátor má spoň jednu charakteristickú hodnotu a k nej prislúchajúci nenulový charakteristický vektor $\vec{x}'$, pričom $\hat{B}\vec{x}' = \hat{B}_1\vec{x}' = \lambda' x'$. Pretože $\vec{x}' \in R_\lambda$, platí súčasne aj $\hat{A}\vec{x}' = \lambda \vec{x}'$, čo bolo treba dokázať.

15. Vlastnosti hermitovských a unitárnych operátorov

Veta. Súčin dvoch hermitovských operátorov je hermitovský operátor vtedy a len vtedy, ak tieto operátory komutujú.

Dôkaz. Nech $\hat{A}^+ = \hat{A}$ a $\hat{B}^+ = \hat{B}$. Potom $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+ = \hat{B}\hat{A}$, ak komutujú, $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, potom $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{A}\hat{B}$.

Veta. Súčin dvoch unitárnych operátorov je unitárny operátor.

Dôkaz. Nech $\hat{A}^+ = \hat{A}^{-1}$ a $\hat{B}^+ = \hat{B}^{-1}$. Potom $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+ = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} = (\hat{A}\hat{B})^{-1}$.

Veta. Charakteristické hodnoty hermitovského operátora sú reálne čísla.

Dôkaz. Nech $\hat{A} = \hat{A}^+$ a $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, pre $\vec{x} \neq \vec{0}$. Pre hermitovský operátor platí $(\hat{A}\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, \hat{A}\vec{x})$, alebo $\lambda^*(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda(\vec{x}, \vec{x})$, pretože $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, dostaneme $\lambda^* = \lambda$.

Veta. Nech $\hat{A}$ je hermitovský operátor definovaný nad n-dimenzionálnym unitárnym priestorom V a nech $\vec{x}$ je charakteristický vektor $\hat{A}$.

Množina vaktorov

$$\mathcal{U} = \{\vec{y};\ (\vec{x}, \vec{y}) = 0\} \subset V$$

tvorí (n-1)-dimenzionálny podpriestor, ktorý je invariantný vzhľadom k $\hat{A}$.

Dôkaz. Vytvorme 1-dimenzionálny podpriestor $\mathcal{U}(\vec{x}) = \operatorname{span}\{\vec{x}\}$. Jeho ortogonálny doplnok je totožný s podpriestorom $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}(\vec{x})^{\perp} = \mathcal{U}$. Vieme, že pla

$V = \mathcal{U}(\vec{x}) \oplus \mathcal{U}$, čiže dimenzia $\mathcal{U}$ je $\dim(\mathcal{U}) = n-1$. Dokážeme, že $\mathcal{U}$ je invariantný podpriestor vzhľadom k $\hat{A}$, $\hat{A}\mathcal{U} = \mathcal{U}$. Nech $\vec{y} \in \mathcal{U}$, potom $(\vec{y}, \vec{x}) = 0$, pre $\hat{A}\vec{y}$ platí $(\hat{A}\vec{y}, \vec{x}) = (\vec{y}, \hat{A}\vec{x}) = \lambda(\vec{y}, \vec{x}) = 0$, čiže $\hat{A}\vec{y} \in \mathcal{U}$, čo bolo potrebné dokázať.

Veta. Dva charakteristické vektory hermitovského operátora, ktoré sú priradené dvom rôznym charakteristickým hodnotám, sú ortogonálne.

Dôkaz. Nech $\hat{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$, $\hat{A}\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2$ a $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Platí $(\hat{A}\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2) = \lambda_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, čiže $(\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$. Pretože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dostaneme $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$, vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ sú ortogonálne.

Veta. Lineárny operátor $\hat{A}$ definovaný nad n-dimenzionálnym unitárnym priestorom je unitárny vtedy a len vtedy, ak zobrazuje ortonormálnu bázu na ortonormálnu bázu.

Dôkaz. 1. Podmienka nutná, $\hat{A}^+ = \hat{A}^{-1}$. Nech $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ je ortonormálna báza v V, $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ pre $i,j = 1,2,\dots,n$. Definujme $\vec{f}_i = \hat{A}\vec{e}_i$, pre $i = 1,2,\dots n$. Potom $(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = (\hat{A}\vec{e}_i, \hat{A}\vec{e}_j) = (\vec{e}_i, \hat{A}^+\hat{A}\vec{e}_j) = \delta_{ij}$ pre $i,j = 1,2,\dots,n$.

2. Podmienka postačujúca. Nech $\hat{A}$ je lineárny operátor nad V, majme dve ortogonálne báze v V, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ a $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$, pričom $\vec{f}_i = \hat{A}\vec{e}_i$ pre $i = 1,2,\dots,n$, platí $(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij} = (\hat{A}\vec{e}_i, \hat{A}\vec{e}_j) = (\vec{e}_i, \hat{A}^+\hat{A}\vec{e}_j)$, pre $i,j = 1,2,\dots,n$. Z jednoduchej diskusie vyplýva, že $\hat{A}^+\hat{A} = \hat{E}$. Podobne dokážeme, že $AA^+ = \hat{E}$. Platí teda $\hat{A}\hat{A}^+ = \hat{A}^+\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{A}$ je unitárny operátor.

Veta. Charakteristické hodnoty unitárneho operátora majú absolútnu hodnotu rovnú jednej (ležia na jednotkovej kružnici v komplexnej rovine).

Dôkaz. Nech $\hat{A} = \hat{A}^{-1}$ a $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ pre $\vec{x} \neq \vec{0}$. Potom $(\vec{x}, \vec{x}) = (\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{x}) = |\lambda|^2(\vec{x}, \vec{x})$, pretože $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, platí $|\lambda|^2 = 1$, alebo $|\lambda| = 1$.

17. Ortoprojekčné operátory (ortoprojektory)

Definícia. Projekčný operátor $\hat{P}$ sa nazýva ortoprojekčný operátor (ortoprojektor), ak $\hat{P}$ je hermitovský operátor.

Nech $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ sú dva podpriestory lineárneho priestora V, pričom $V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. Nech $\hat{P}_1$ ($\hat{P}_2$) je projektor na $\mathcal{U}_1$ ($\mathcal{U}_2$).

Veta. Nech $\hat{P}_2$ je ortoprojektor, potom aj $\hat{P}_2$ je ortoprojektor a podpriestory $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ sú ortogonálne.

Dôkaz. Platí $\hat{P}_2 = \hat{E} - \hat{P}_1$, čiže $\hat{P}_2^+ = \hat{E}^+ - \hat{P}_1^+ = \hat{P}_2$. Nech $\vec{x}_1 \in \mathcal{U}_1$, $\vec{x}_2 \in \mathcal{U}_2$, potom $\hat{P}_1 \vec{x}_1 = \vec{x}_1$, $\hat{P}_2 \vec{x}_2 = \vec{x}_2$ a $\hat{P}_1 \vec{x}_2 = (\hat{E} - \hat{P}_2)\vec{x}_2 = \vec{O}$. Počítajme skalárny súčin $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\hat{P}_1 \vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \hat{P}_1^+ \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \hat{P}_1 \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \vec{O}) = 0 .$$

To znamená, že podpriestory $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ sú ortogonálne.

Veta. Podpriestory $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ sú ortogonálne vtedy a len vtedy, ak ich projektory sú ortoprojektory.

Dôkaz. 1. Nech platí $\hat{P}_1^+ = \hat{P}_1$ a $\hat{P}_2^+ = \hat{P}_2$, potom podľa predchádzajúcej vety podpriestory $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ sú ortogonálne.

2. Predpokladajme, že podpriestory $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ sú ortogonálne. Každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ môže byť vyjadrené v tvare $\vec{x}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{x}_2 = \vec{u}_1' + \vec{u}_2'$, kde $\vec{u}_1, \vec{u}_1' \in \mathcal{U}_1$ a $\vec{u}_2, \vec{u}_2' \in \mathcal{U}_2$. Ľahko dokážeme, že

$$(\hat{P}_1 \vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \hat{P}_1 \vec{x}_2),$$
$$(\hat{P}_2 \vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \hat{P}_2 \vec{x}_2),$$

čiže $\hat{P}_1$ a $\hat{P}_2$ sú hermitovské operátory.

Poznámka. Predchádzajúce úvahy sa dajú jednoducho zovšeobecniť. Nech

$$V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_p ,$$

je priama suma podpriestorov. Nech $\hat{P}_i$ je projektor na podpriestor $\mathcal{U}_i$, pre $i = 1, 2, \ldots, p$. Z predpokladu, že tieto podpriestory sú ortogonálne vyplýva, že projektory $\hat{P}_i$ sú ortoprojektory,

$$\hat{P}_i^+ = \hat{P}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

Tieto ortoprojektory vyhovujú vzťahom

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \cdots + \hat{P}_p = \hat{E} ,$$

$$\hat{P}_i \hat{P}_j = \delta_{ij} P_i , \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p)$$

kde $\hat{E}$ je jednotkový operátor.

18. Charakteristický problém hermitovského operátora

Nech $\hat{A}$ je hermitovský operátor ($\hat{A}^+ = \hat{A}$) definovaný nad n-dimenzionálnym unitárnym priestorom V . V kapitole 15 sme ukázali, že jeho charakteristické hodnoty sú reálne a dva charakteristické vektory odpovedajúce rôznym charakteristickým hodnotám sú ortogonálne.

Nech $\vec{x}$ je charakteristický vektor operátora $\hat{A}$, potom podľa kapitoly 15 podpriestor $\mathcal{U}(\vec{x}) = \mathrm{span}\{\vec{x}\}$ je invariantný vzhľadom k operátoru $\hat{A}$.

Veta. Hermitovský operátor $\hat{A}$ definovaný nad n-dimenzionálnym unitárnym priestorom V má n ortonormálnych charakteristických vektorov.

Dôkaz. Vieme, že každý operátor (čiže aj hermitovský) má aspoň jednu charakteristickú hodnotu λ_1 , $\hat{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$. Vytvorme podpriestor

$$\mathcal{U}_1(\vec{x}_1) = \{\vec{y} \in V;\ (\vec{y}, \vec{x}_1) = 0\} \subset V ,$$

ktorý je (n-1)-dimenzionálny a invariantný vzhľadom k $\hat{A}$, $\hat{A}\,\mathcal{U}_1(\vec{x}_1) = \mathcal{U}_1(x_1)$. To znamen, že operátor $\hat{A}$ indukuje v podpriestore $\mathcal{U}_1(\vec{x}_1)$ nový hermitovsk operátor $\hat{A}_1$ definovaný podmienkou $\hat{A}\vec{x} = \hat{A}_1\vec{x}$, pre každé $\vec{x} \in \mathcal{U}_1(\vec{x}_1)$ a $\hat{A}\vec{x} = \vec{0}$ pre každé $\vec{x} \notin \mathcal{U}_1(\vec{x}_1)$. Operátor $\hat{A}_1$ má v $\mathcal{U}_1(\vec{x}_1)$ aspoň jednu charakteristickú hodnotu λ_2 , ku ktorej je priradený charakteristický vektor $\vec{x}_2 \in \mathcal{U}_1(\vec{x}_1$ $\hat{A}_1\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$. Vytvorme (n-2)-dimenzionálny podpriestor

$$\mathcal{U}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \{\vec{y} \in V;\ (\vec{y}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{x}_2) = 0\} ,$$

ktorý je invariantný vzhľadom k $\hat{A}_1$. Operátor $\hat{A}_1$ indukuje v $\mathcal{U}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ hermitovský operátor $\hat{A}_2$, definovaný $\hat{A}\vec{x} = \hat{A}_2\vec{x}$ pre každé $\vec{x} \in \mathcal{U}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ a $\hat{A}_2\vec{x} =$ pre každé $\vec{x} \notin \mathcal{U}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Týmto postupom vytvoríme n ortonormálnych charakteristických vektorov $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, kde

$$\hat{A}\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i . \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Poznámka. Množina charakteristických vektorov $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ hermitovského operátora $\hat{A}$ tvorí bázu unitárneho priestora V ,

$$V = \mathrm{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\} .$$

Maticová reprezentácia operátora $\hat{A}$ v tejto báze je diagonálna matica

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\det(\hat{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n ,$$
$$Tr(\hat{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n .$$

Ako už bolo naznačené v kapitole 14, nie všetky charakteristické hodnoty operátora $\hat{A}$ musia byť rôzne. Označme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ rôzne charakteristické hodnoty, ich multiplicita nech je $n_1, n_2, \dots, n_p$. Vybermi si charakteristickú hodnotu λ_i ($1 \leq i \leq p$), podľa poslednej vety k tejto charakteristickej hodnote existuje n_i ortonormálnych charakteristických vektorov, $\vec{x}_i^{(1)}, \dots, \vec{x}_i^{(n_i)}$. Definujme podpriestor

$$\mathcal{U}_i = span\{\vec{x}_i^{(1)}, \dots, \vec{x}_i^{(n_i)}\},$$

kde $\dim(\mathcal{U}_i) = n_i$ a pre každé $\vec{x} \in \mathcal{U}_i$ platí $\hat{A}\vec{x} = \lambda_i \vec{x}$. Podpriestor $\mathcal{U}_i$ sa nazýva <u>charakteristický podpriestor</u> operátora $\hat{A}$ priradený charakteristickej hodnote λ_i. Dimenzia tohto podpriestoru je totožná s multiplicitou jej charakteristickej hodnoty. Priama suma týchto podpriestorov je priestor V,

$$V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_p .$$

19. Spektrálny rozvoj hermitovského operátora

Nech $\hat{A}$ je hermitovský operátor definovaný nad n-dimenzionálnym unitárnym priestorom V. Ako bolo ukázané na záver predchádzajúcej kapitoly, tento priestor môžeme vyjadriť ako priamu sumu charakteristických ortogonálnych podpriestorov,

$$V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_p .$$

Nech $\hat{P}_i$ je ortoprojektor na podpriestor $\mathcal{U}_i$, potom platia tieto vzťahy

$$Tr(\hat{P}_i) = \dim(U_i) = n_i \, , \qquad (i = 1,2,\dots,p)$$

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \dots + \hat{P}_p = \hat{E} \, ,$$

$$\hat{P}_i^+ = \hat{P}_i \, , \qquad (i = 1,2,\dots,p)$$

$$\hat{P}_i \hat{P}_j = \delta_{ij} \hat{P}_j \, , \qquad (i,j = 1,2,\dots,p)$$

kde $\hat{E}$ je jednotkový operátor v unitárnom priestore V .

Veta. Každý ortoprojektor $\hat{P}_i$ komutuje s operátorom $\hat{A}$, pričom

$$\hat{P}_i \hat{A} = \hat{A} \hat{P}_i = \lambda_i \hat{P}_i \, . \qquad (i = 1,2,\dots,p)$$

Dôkaz. Charakteristické vektory $\hat{A}$ tvoria bázu v V , označme tieto vektory $\vec{x}_i^{(j)}$, kde $i = 1,2,\dots,p$ a $j = 1,2,\dots,n_i$, potom $V = span\{\vec{x}_i^{(j)}\}$, pričom platí

$$\hat{A} \vec{x}_i^{(j)} = \lambda_i \vec{x}_i^{(j)}$$

To znamená, že $U_i = span\{\vec{x}_i^{(1)},\dots,\vec{x}_i^{(n_i)}\}$. Každé $\vec{x} \in V$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu týchto charakteristických vektorov,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^{(j)} \vec{x}_i^{(j)} .$$

Potom

$$\hat{P}_i \hat{A} \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^{(j)} \hat{P}_i \hat{A} \vec{x}_i^{(j)} = \lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^{(j)} \vec{x}_i^{(j)} = \lambda_i \hat{P}_i \vec{x} \, ,$$

$$\hat{A} \hat{P}_i \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^{(j)} \hat{A} \hat{P}_i \vec{x}_i^{(j)} = \lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^{(j)} \vec{x}_i^{(j)} = \lambda_i \hat{P}_i \vec{x} \, .$$

Platí teda

$$\hat{P}_i \hat{A} = \hat{A} \hat{P}_i = \lambda_i \hat{P}_i \, .$$

Veta. Pre hermitovský operátor $\hat{A}$ platí

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \hat{P}_i \, ,$$

táto formula sa nazýva spektrálny rozvoj operátora $\hat{A}$.

Dôkaz. $\hat{A} = \hat{E} \hat{A} = \sum \hat{P}_i \hat{A} = \sum_i \lambda_i \hat{P}_i$ kde sme použili formulu $\hat{E} = \sum_i \hat{P}_i$.

Množina všetkých charakteristických hodnôt hermitovského operátora $\hat{A}$ sa nazýva spektrum operátora A ,

$$spect(\hat{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\},$$

ktorá je podmnožinou množiny reálnych čísel, $spect(A) \subset R$.

Nech $f(x)$ je funkcia reálnej premennej, jej definičný obor je $D_f \subset R$. Za predpokladu, že všetky charakteristické hodnoty operátora $\hat{A}$ ležia v D_f , $spect(A) \subset D_f$, môžeme definovať funkciu operátora

$$f(\hat{A}) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) P_i ,$$

kde $f(\lambda_i)$ je hodnota funkcie $f(x)$ v bode $x = \lambda_i$. Ukážeme, že takto definovaná funkcia je konzistentná s pojmom mocniny operátora. Napríklad

$$\hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \hat{P}_i \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \hat{P}_j = \sum_{i,j=1}^{p} \lambda_i \lambda_j \hat{P}_i \hat{P}_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \hat{P}_i .$$

Pre n-tú mocninu $\hat{A}^n$, kde n je prirodzené číslo, platí

$$\hat{A}^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n \hat{P}_i .$$

Za predpokladu, že $\hat{A}$ nemá nulovú charakteristickú hodnotu, $0 \notin spect(\hat{A})$, môžeme definovať tiež aj záporné mocniny A ,

$$\hat{A}^{-n} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i^n} \hat{P}_i .$$

Ak spektrum operátora $\hat{A}$ je nezáporné, potom môžeme definovať mocniny operátora $\hat{A}$ s kladným racionálnym exponentom,

$$\hat{A}^{p/q} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{p/q} \hat{P}_i .$$

Za predpokladu, že $spect(\hat{A})$ je kladné, môžeme definovať ľubovoľnú racionálnu mocninu matice $\hat{A}$,

$$\hat{A}^{\pm p/q} = \sum_i \lambda_i^{\pm p/q} \hat{P}_i .$$

Nech funkcia $f(x)$ má v okolí bodu $x = 0$ Taylorov rozvoj ,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots ,$$

s oborom konvergencie M . Druhá alternatívna možnosť definície funkcie operátora $\hat{A}$ je

$$f(\hat{A}) = a_0 \hat{E} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + \ldots + a_n \hat{A}^n + \ldots .$$

Vzniká otázka, kedy sú tieto dva rôzne prístupy k definícii $f(\hat{A})$ ekvivalentné? Dokážeme, že ak $spect(\hat{A}) \subset M$ (t.j. charakteristické hodnoty operátora $\hat{A}$ ležia v oblasti konvergencie M rozvoja funkcie $f(x)$), potom tieto dve definície sú ekvivalentné.

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n \hat{P}_i = \sum_{i=1}^{p} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^n a_n \right\} \hat{P}_i ,$$

za predpokladu, že $\lambda_i \in M$ pre každé $i = 1, 2, \dots, p$, platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_i^n = f(\lambda_i) ,$$

čiže

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}^n = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) \hat{P}_i .$$

Príklady. 1. Taylorov rozvoj exponenciálnej funkcie e^x v okolí $x = 0$ má tvar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

tento rozvoj konverguje pre každé x, $M = R$. Exponenciála hermitovského operátora potom má tvar

$$e^{\hat{A}} = \hat{E} + \hat{A} + \frac{1}{2!} \hat{A}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \hat{A}^n + \dots$$

Tento rozvoj je ekvivalentný pre každý hermitovský operátor A s

$$e^{\hat{A}} = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i} \hat{P}_i .$$

2. Taylorov rozvoj funkcie $1/(1-x)$ v okolí $x = 0$ má tvar

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

ktorý konverguje pre $|x| < 1$. Ak $\hat{A}$ je taký hermitovský operátor, že všetky jeho charakteristické hodnoty ležia v intervale $(-1, 1)$, potom

$$(\hat{E} - \hat{A})^{-1} = \hat{E} + \hat{A} + \hat{A}^2 + \dots + \hat{A}^n + \dots .$$

Alternatívna formula operátorovej funkcie je

$$(\hat{E} - \hat{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_i} \hat{P}_i .$$

Vidíme, že táto funkcia je definovaná ak všetky jej charakteristické hodnoty sú rôzne od 1 alebo -1. Formule sú ekvivalentné vtedy, ak $\mathrm{spect}(A) \subset (-1, 1)$, t.j. $|\lambda_i| < 1$ pre $i = 1, 2, \dots, p$.