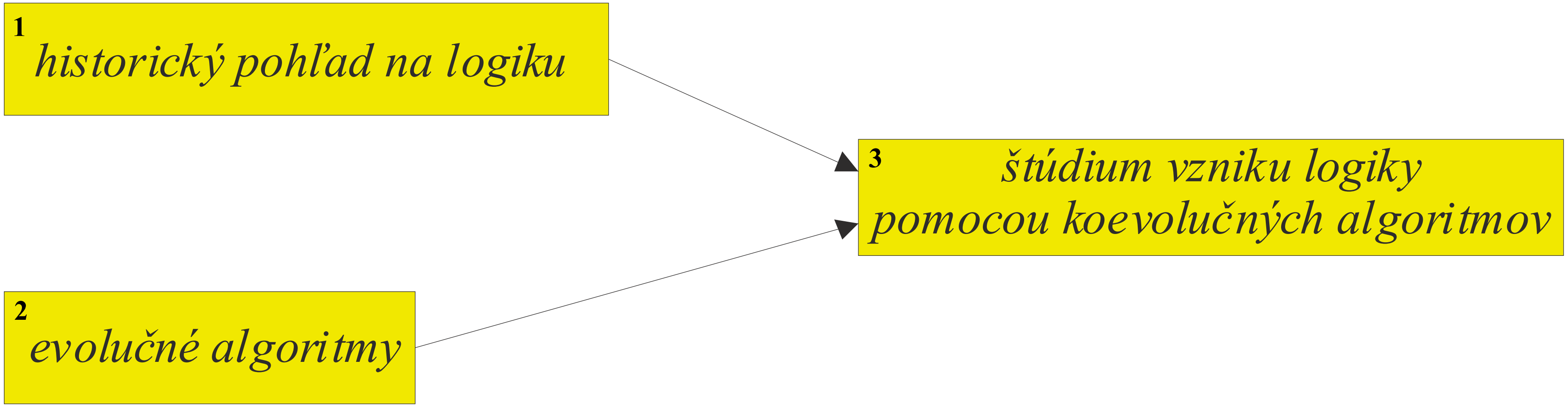
# Štúdium emergencie výrokovej logiky pomocou Darwinovej evolúcie. Epistemicko-evolučný pohľad

Vladimír Kvasnička
Ústav aplikovanej informatiky FIIT STU, Bratislava

# Schéma prednášky



# 1. Historický pohľad na logiku

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1/0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1/0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1/0 | 1 |

- Takto špecifikovaná tabuľka pravdivostných hodnôt základných logických spojok bola v *podstate* známa už logikom v starom Grécku (cca 300 - 200 rokov p. K)
- Staroveký Gréci mali problém s odlíšením spojok OR a XOR a taktiež s pravdivosťou implikácie pre nepravdivý antecedent.
- Túto tabuľku môžeme považovať za jedno z najväčších kultúrnych dedičstiev našej civilizácie po starých Grékoch.

## Tabuľka pravdivostných hodnôt unárnych a binárnych základných logických spojok

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Táto tabuľka má svoju históriu, v tejto podobe bola zafixovaná až na prelome stredoveku a novoveku.

Môžeme si položiť otázku o pôvode tejto tabuľky z pohľadu evolučnej epistemológie, či jej tvar je výsledkom postupných zmien v priebehu evolúcie našej kultúry?

K riešeniu tohto problému použijeme metaforu (heuristiku) ***evolučného algoritmu*** založeného na myšlienke Darwinovej evolúcie.

Filozof Chrysippos (približne 280-205 pr. K.) zostrojil päť rôznych schém usudzovania, ktoré sú založené na zložených výrokoch:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | *ak prvé, tak druhé*<br>*avšak prvé*<br>―――――――<br>*teda druhé* | $\varphi_1 = \big(\big(p \Rightarrow q\big) \wedge p\big) \Rightarrow q$ |
| 2 | *ak prvé, tak druhé*<br>*avšak nie druhé*<br>―――――――<br>*teda nie prvé* | $\varphi_2 = \big(\big(p \Rightarrow q\big) \wedge \neg q\big) \Rightarrow \neg p$ |
| 3 | *nie je pravda, že aj prvé aj druhé*<br>*avšak prvé*<br>―――――――<br>*teda nie druhé* | $\varphi_3 = \big(\neg\big(p \wedge q\big) \wedge p\big) \Rightarrow \neg q$ |
| 4 | *prvé alebo druhé*<br>*avšak nie prvé*<br>―――――――<br>*teda druhé* | $\varphi_4 = \big(\big(p \vee q\big) \wedge \neg p\big) \Rightarrow q$ |
| 5 | *buď prvé alebo druhé*<br>*avšak prvé*<br>―――――――<br>*teda nie druhé* | $\varphi_5 = \big(\big(p \oplus q\big) \wedge p\big) \Rightarrow \neg q$ |

- Predstavitelia stoickej starovekej filozofie sa domnievali (asi chybne), že použitím týchto päť základných schém usudzovania sme schopný odvodiť ďalšie (ľubovolné) schémy usudzovania.

- Súčasná informatika má výpočtové prostriedky (evolučné algoritmy) na simuláciu emergencie výrokovej logiky z tohto protostavu do súčasnej podoby. Tento epistemologicko-evolučný experiment môžeme realizovať použitím evolučných algoritmov (napr. pomocou Darwinovej koevolučnej teórie a GA).

# 2. Evolučné algoritmy

## Darwinova evolúcia ako algoritmus

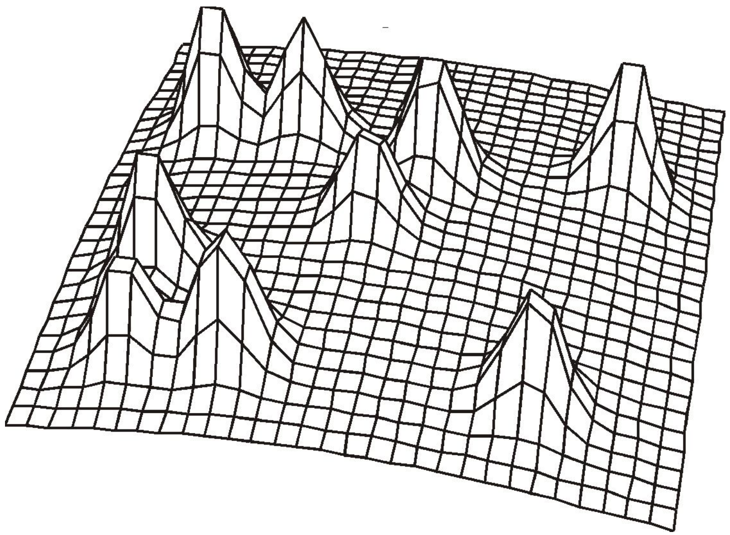
- Táto objavná a súčasne jednoduchá metafora na riešenie zložitých optimalizačných problémov bola prvý krát použitá americkým informatikom ***Johnom Hollandom*** počiatkom 70. rokov minulého storočia.

John Holland, MSU

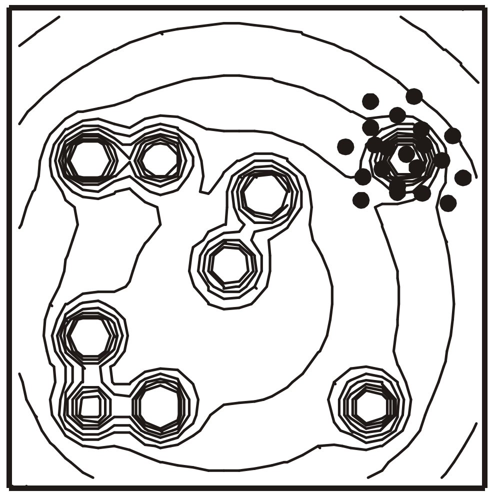
- Evolučné algoritmy možno chápať ako abstraktnú realizáciu veľmi efektívnej heuristiky navrhnutej americkým štatistikom a evolučným biológom Sewallom Wrightom, ktorý v r. 1932 navrhol [17] jednoduchú interpretáciu procesu evolúcie populácie organizmov ako proces optimalizácie (maximalizácie) funkcie fitnes.

$$\boldsymbol{x}_{opt} = arg \max_{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n} f\left(\boldsymbol{x}\right)$$


Sewall Wright (*1889,+1989)



A



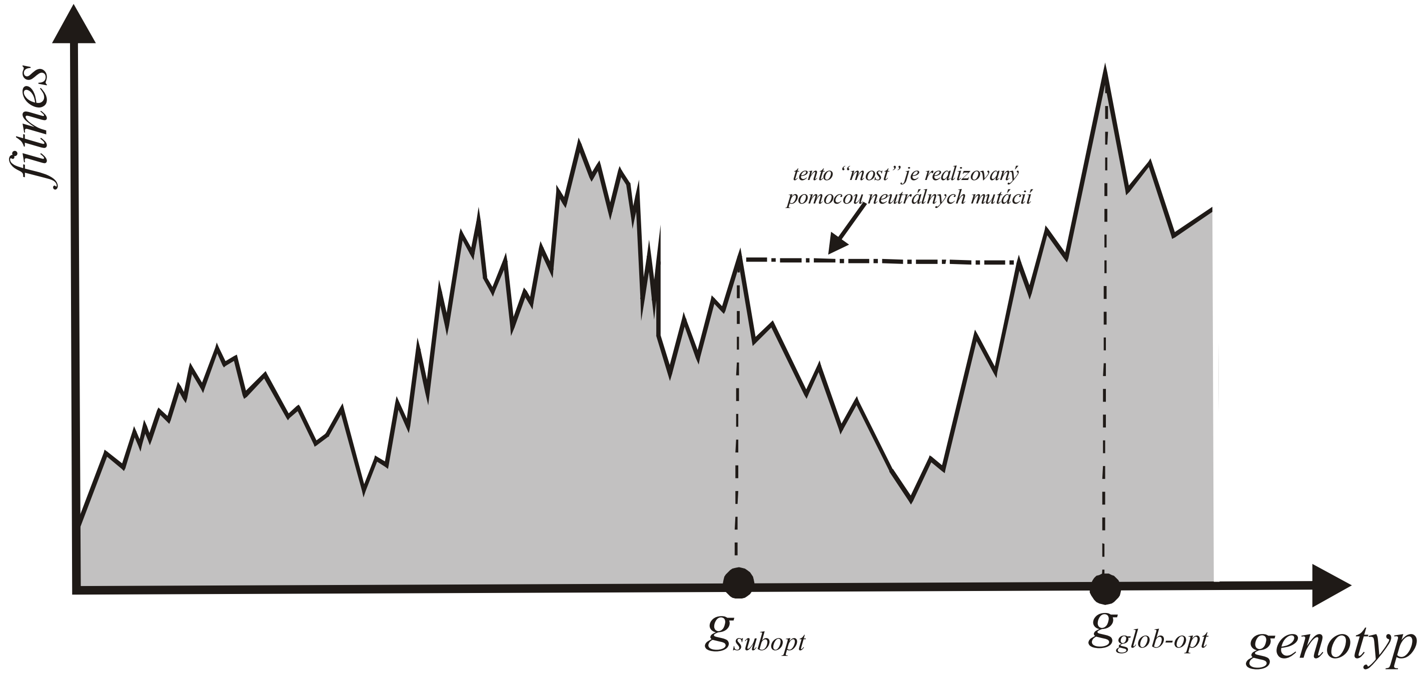
B

Znázornenie povrchu fitnes (A), ktorý vyjadruje závislosť fitnes agentov od zloženia ich genotypu. V tomto jednoduchom modelovom prípade sa jedná o organizmus, ktorý má dvoj-génový chromozóm, pričom jeho zložky sú reálne čísla. Kontúrový graf (B) je priradený povrchu fitnes, oblak bodov znázorňuje populáciu agentov.

*Motto:*

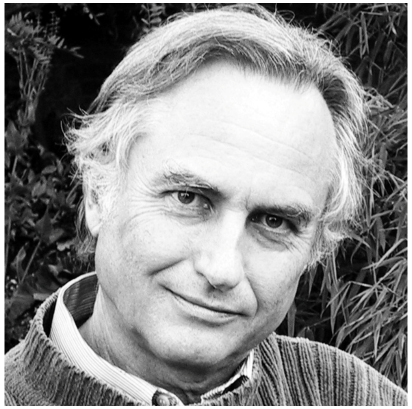
*Tak, ako to vidím ja, centrálnym problémom evolúcie je mechanizmus pomocou ktorého druhy môžu spojite nájsť cestu z nižších na vyššie vrcholy.*

(*Sewall Wright* (*1931*))



# Univerzálnosť Darwinizmu – evolúcia ako algoritmus

(1) Dawkins, R. : Universal Darwinism. In Bendall D. S. (ed.) *Evolution from Molecules to Men*. Cambridge Univesity Press, London, 1982, pp. 403 -425. V tejto stati Dawkins formuloval myšlienku, že pokial existuje vo vesmíre život aj na inej planéte ako Zem, potom sa vyvíja pomocou Darwinovej evolúcie, táto evolúcia má univerzálny charakter.

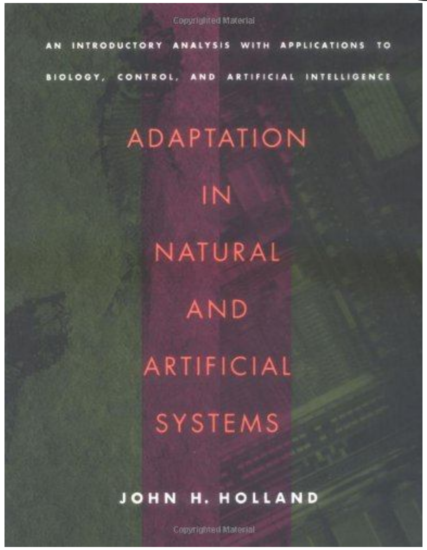


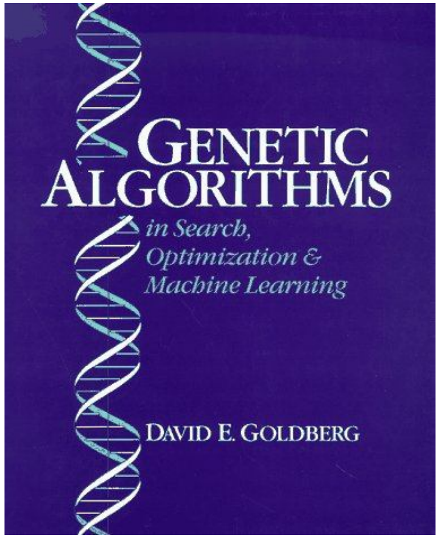
Richard Dawkins

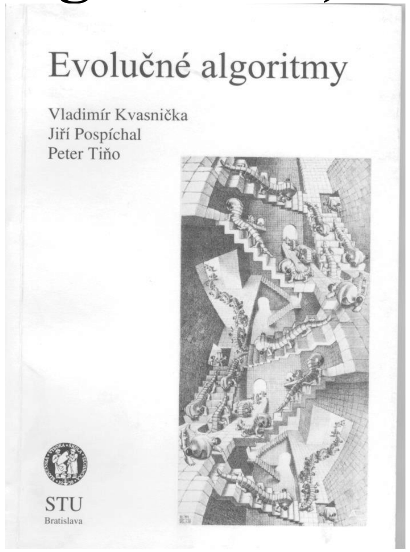
(2) Dennett, D. C. : *Darwin's Dangerous Idea - Evolution and the Meaning of Life.* London: Penguin Press 1995. V tejto knihe americký filozof a kognitívny vedec Dennet rozvíjal ideu, že Darwinova evolúcia je univerzálny algoritmus, ktorého realizácia nezávisí od hmotnej realizácii.

Daniel Dennett

# Evolučné algoritmy (genetický algoritmus)




Holland, J. H.: *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.

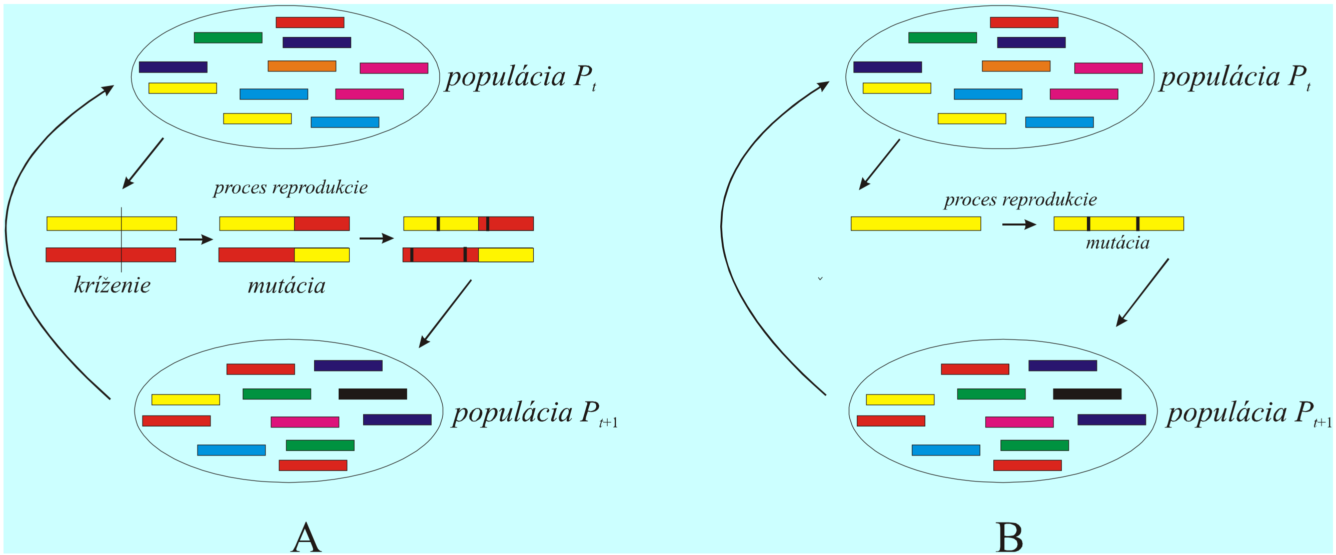
Goldberg, D. E.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1989

Kvasnička, V., Pospíchal, J., Tiňo, J.: *Evolučné algoritmy*, Bratislava: STU Press, 2000

Predmetom záujme evolučných algoritmov je riešenie optimalizačného problému funkcie $f:\{0,1\}^n \rightarrow R$

$$\boldsymbol{x}_{opt} = arg \max_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n} f(\boldsymbol{x})$$

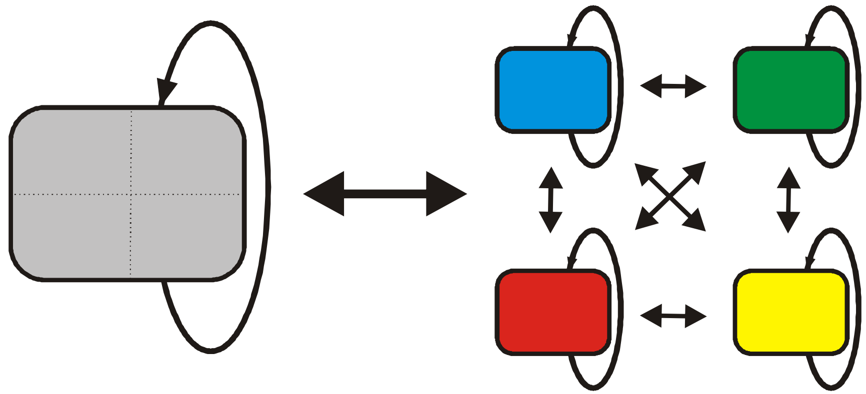
Zložitosť riešenia tohto problem rastie exponenciálne , $t_{CPU} \approx 2^n$, preto k jeho riešeniu musíme použiť efektívnu heuristiku, napr. Hollandov genetický algoritmus.



# Kompetetívne koevolučné algoritmy

**(1) Komplexný optimalizačný problém je rozložený na niekoľko "jednoduchších" podproblémov**

**(2) Koevolúcia je spôsob riešenia "jednoduchších" podproblémov tak, aby získané riešenie bolo blízke (alebo identické) globálnemu riešenie nerozloženého problému.**

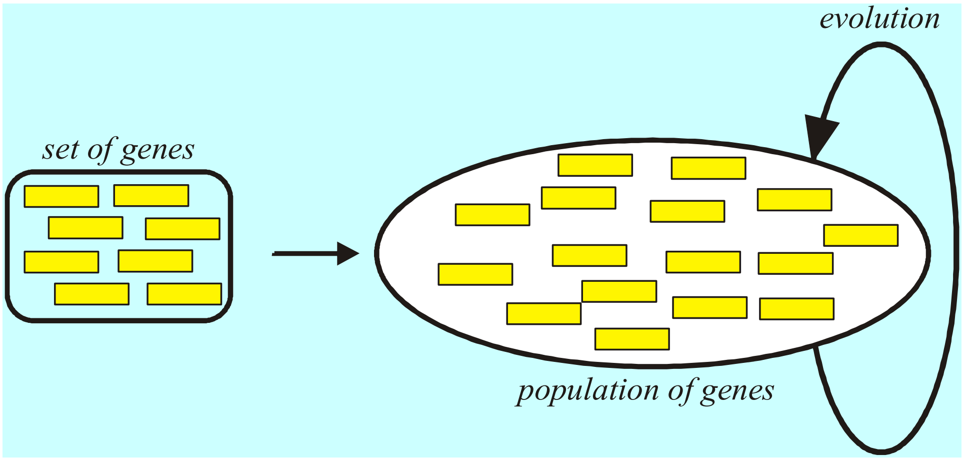


# Globálny optimalizačný problém

$$\boldsymbol{x}_{opt} = \arg \max_{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n} f(\boldsymbol{x})$$

In general, very difficult computational discrete problems (e.g. $D = \{0,1\}^n$) are usually NP hard

## Standard version of Darwinian evolution



```
population P is randomly generated;
all replicators are evaluated by fitness;
for t:=1 to t_max do
begin x:=O_select(P);
      if random<prob(x) then
      begin x':=O_mut(x);
            x' is evaluated by fitness;
            x'':=O_select(P);
            P:=(P-{x''})+{x'};
      end;
end;
```

# Competitive version of Darwinian coevolution

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_P \oplus \boldsymbol{x}_Q \qquad (4a)$$

$$y = f\left(\boldsymbol{x}_P \oplus \boldsymbol{x}_Q\right) \qquad (4b)$$

A reformulation of the optimization problem

$$\boldsymbol{x}_{opt} = \boldsymbol{x}_{P,opt} \oplus \boldsymbol{x}_{Q,opt} \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{x}_{P,opt} = \arg\max_{\boldsymbol{x}_P \in D_P} f\left(\boldsymbol{x}_P \oplus \boldsymbol{x}_{Q,opt}\right) \qquad (6a)$$

$$\boldsymbol{x}_{Q,opt} = \arg\max_{\boldsymbol{x}_Q \in D_Q} f\left(\boldsymbol{x}_{P,opt} \oplus \boldsymbol{x}_Q\right) \qquad (6b)$$

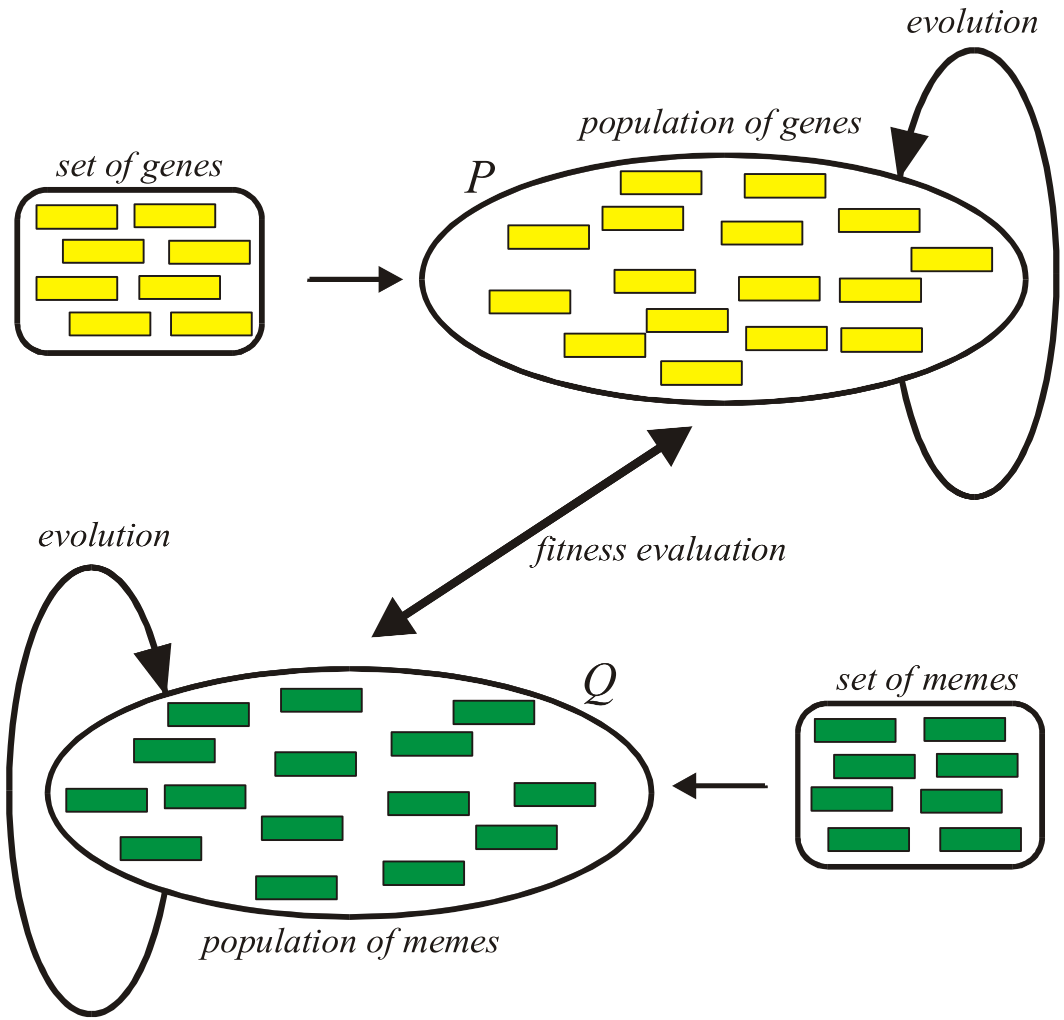
We have two different populations

$$P = \{\boldsymbol{x}_{P,1}, \boldsymbol{x}_{P,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{P,A}\} \text{ and } Q = \{\boldsymbol{x}_{Q,1}, \boldsymbol{x}_{Q,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{Q,B}\} \quad (7)$$

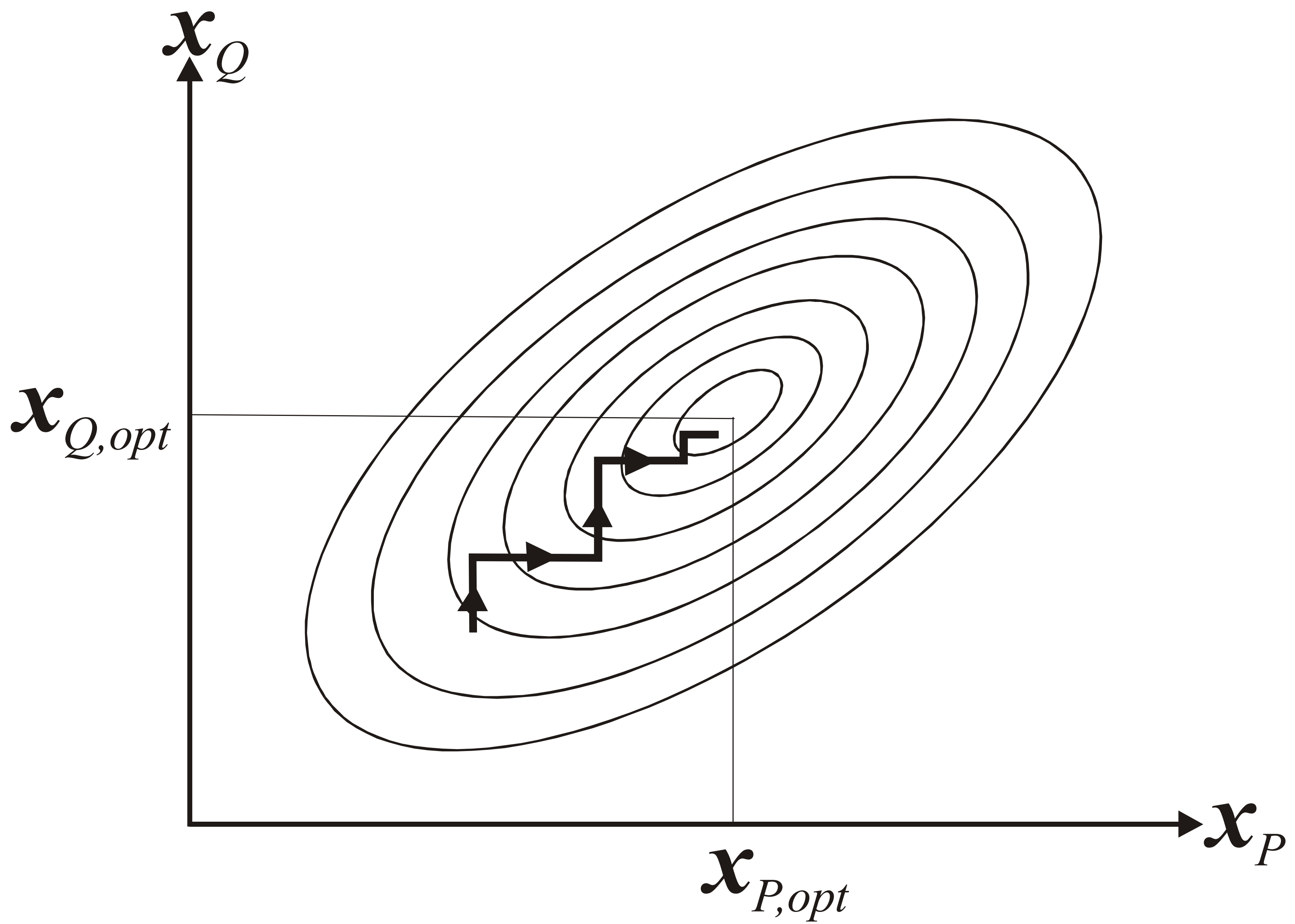
Fitness of replicators

$$f_P(\boldsymbol{x}_P) = \max_{\boldsymbol{x}_Q \in Q} f(\boldsymbol{x}_P \oplus \boldsymbol{x}_Q) \quad (8a)$$

$$f_Q(\boldsymbol{x}_Q) = \max_{\boldsymbol{x}_P \in P} f(\boldsymbol{x}_P \oplus \boldsymbol{x}_Q) \quad (8b)$$


evolution
population of genes
set of genes
P
fitness evaluation
evolution
Q
set of memes
population of memes

```
populations P and Q are randomly generated;
all replicators are evaluated by fitness;
for t:=1 to t_max do
begin x_P:=O_select(P);
      if random<prob(fitness(x_P)) then
      begin x_P':=O_mut(x_P);
            x_P' is evaluated by fitness;
            x_P'':=O_select(P);
            P:=(P-{x_P''})+{x_P'};
      end;
      x_Q:=O_select(Q);
      if random<prob(fitness(x_Q)) then
      begin x_Q':=O_mut(x_Q);
            x_Q' is evaluated by fitness;
            x_Q'':=O_select(Q);
            Q:=(Q-{x_Q''})+{x_Q'};
      end;
end;
```

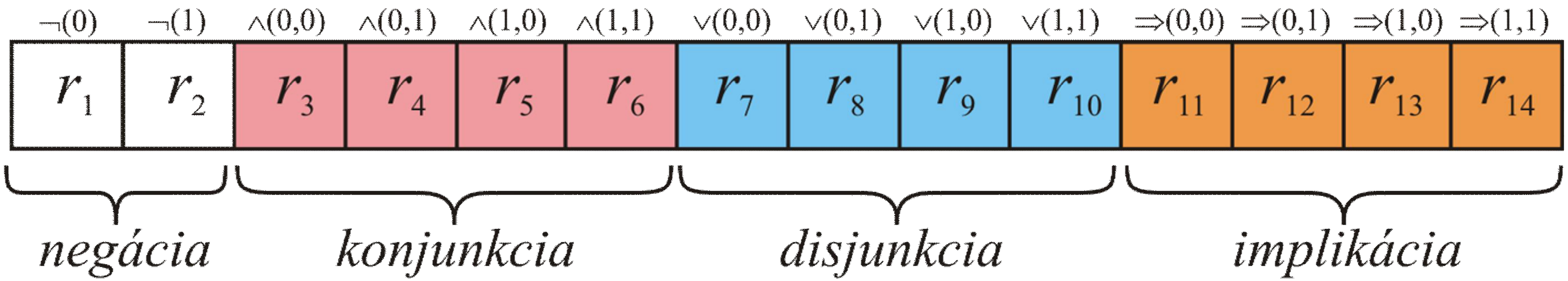

$x_Q$
$x_{Q,opt}$
$x_P$
$x_{P,opt}$

# 3. Štúdium vzniku logiky pomocou kompetitívnej Darwinovej koevolúcie

## Reprezentácia tabuľky pravdivostných hodnôt pomocou binárneho vektora *x*

Uvažujme binárny vektor fixnej dĺžky

$$\boldsymbol{x} = \left(r_1, r_2, \ldots, r_{14}\right) \in \{0,1\}^{14}$$



Binárny chromozóm – replikátor ***reprezentuje tabuľky*** pravdivostných hodnôt štyroch základných logických spojok.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $r_1$ | $r_1$ | $r_3$ | $r_7$ | $r_{11}$ |
| 0 | 1 | / | / | $r_4$ | $r_8$ | $r_{12}$ |
| 1 | 0 | / | / | $r_5$ | $r_9$ | $r_{13}$ |
| 1 | 1 | $r_2$ | $r_2$ | $r_6$ | $r_{10}$ | $r_{14}$ |

# *Tabuľka formačných formúl tvoriacich množinu $\Phi_{max}$*

| # | $\varphi$ | $M_1(\varphi)$ | $M_0(\varphi)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\varphi_1 = \neg p \vee p$ | $\{(0),(1)\}$ | $\emptyset$ |
| 2 | $\varphi_2 = \neg p \wedge p$ | $\emptyset$ | $\{(0),(1)\}$ |
| 3 | $\varphi_3 = p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\emptyset$ |
| 4 | $\varphi_4 = \neg p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$ | $\{(00),(10),(11)\}$ | $\{(01)\}$ |
| 5 | $\varphi_5 = \neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\emptyset$ |
| 6 | $\varphi_6 = q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ | $\{(00),(10),(11)\}$ | $\{(01)\}$ |
| 7 | $\varphi_7 = p \wedge q \Rightarrow p$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\emptyset$ |
| 8 | $\varphi_8 = p \wedge q \Rightarrow \neg p$ | $\{(00),(01),(10)\}$ | $\{(11)\}$ |
| 9 | $\varphi_9 = p \Rightarrow p \vee q$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\emptyset$ |
| 10 | $\varphi_{10} = q \Rightarrow p \vee \neg q$ | $\{(00),(10),(11)\}$ | $\{(01)\}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | $\varphi_{11} = (p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\varnothing$ |
| 12 | $\varphi_{12} = (p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow \neg q$ | $\{(00),(10),(11)\}$ | $\{(01)\}$ |
| 13 | $\varphi_{13} = (\neg(p \wedge q) \wedge p) \Rightarrow \neg q$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\varnothing$ |
| 14 | $\varphi_{14} = (\neg(p \wedge q) \wedge p) \Rightarrow q$ | $\{(00),(01),(11)\}$ | $\{(10)\}$ |
| 15 | $\varphi_{15} = (\neg(p \wedge q) \wedge q) \Rightarrow \neg p$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\varnothing$ |
| 16 | $\varphi_{16} = (\neg(p \wedge q) \wedge q) \Rightarrow p$ | $\{(00),(10),(11)\}$ | $\{(01)\}$ |
| 17 | $\varphi_{17} = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\varnothing$ |
| 18 | $\varphi_{18} = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow p$ | $\{(10),(11)\}$ | $\{(00),(01)\}$ |
| 19 | $\varphi_{19} = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ | $\{(00),(01),(10),(11)\}$ | $\varnothing$ |
| 20 | $\varphi_{20} = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ | $\{(00),(10),(11)\}$ | $\{(01)\}$ |

Množina formačných formúl $\Phi_{max} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{20}\}$ obsahuje 10 tautológií, 9 splniteľných formúl a 1 kontradikciu.

Poznamenajme, že ku každej formačnej formule $\varphi \in \Phi_{max}$ sú priradené dva modely $M_1(\varphi)$ a $M_0(\varphi)$, pre ktorých interpretácie výrokových premenných je táto formačná formula pravdivé resp. nepravdivé

$$\forall\left(\tau \in M_1(\varphi)\right)\left(val_\tau(\varphi) = 1\right)$$
$$\forall\left(\tau \in M_0(\varphi)\right)\left(val_\tau(\varphi) = 0\right)$$

- Skutočnosť, že množina formačných formúl $\Phi_{max}$ obsahuje nielen tautológie ale aj splniteľné formuly (nepravdivé aspoň pre jednu interpretáciu premenných) vyplýva zo skutočnosti, že ak by táto množina obsahovala len tautológie, potom ľubovoľný binárny vektor $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{14}$ by reprezentoval tabuľku pravdivostných hodnôt, ktorá by obsahovala len jednotkové elementy. Preto musíme do množiny formúl zahrnúť aj formuly, ktoré nie sú tautológie, t. j. majú pre niektoré interpretácie premenných nepravdivé hodnoty (0).

# Reprezentácia podmnožiny formačných formúl pomocou binárneho vektora *x*

Uvažujme binárny vektor fixnej dĺžky

$$\boldsymbol{y} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_{20}\right) \in \{0,1\}^{20}$$

Tento binárny vektor reprezentuje podmnožinu $\Phi \subseteq \Phi_{max} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{20}\}$

$$\varphi_i \in \Phi \Leftrightarrow_{def} y_i = 1$$

$$\varphi_i \notin \Phi \Leftrightarrow_{def} y_i = 0$$

alebo

$$\Phi = \{\varphi_i ; y_i = 1, pre\ i = 1, 2, \ldots, 20\}$$

# Výpočet fitnes replikátorov *x* a *y*

- Pravdivostná hodnota formuly formačnej formuly $\varphi \in \Phi$ pre interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^1$ alebo $\boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^2$ a binárny vektor $\boldsymbol{x}$ (ktorý reprezentuje aktuálnu tabuľku pravdivostných hodnôt logických spojok) je vyjadrená symbolom $val_\tau(\varphi; \boldsymbol{x})$.

- Zavedieme dve populácie $P$ a $Q$

$$P = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_a\} \text{ a } Q = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_b\}$$

  Tieto populácie obsahujú $\boldsymbol{x}$-replikátory (pravdivostné tabuľky, logických spojok) resp. $\boldsymbol{y}$-replikátory (podmnožiny obsahujúce formačné formuly z $\Phi_{max}$) tvoria základ použitého koevolučného algoritmu.

Binárne vektory replikátorov $\boldsymbol{x} \in P$ a $\boldsymbol{y} \in Q$ sú ohodnotené funkciou fitnes takto (pozri priesvitku 19)

$$f(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y} \in Q} \sum_{\varphi \in \Phi(\boldsymbol{y})} \underbrace{\left( \sum_{\boldsymbol{\tau} \in M_1(\varphi)} \delta\left(1, val_\tau(\varphi; \boldsymbol{x})\right) + \sum_{\boldsymbol{\tau} \in M_0(\varphi)} \delta\left(0, val_\tau(\varphi; \boldsymbol{x})\right) \right)}_{\sigma(\varphi, x)} = \max_{\boldsymbol{y} \in Q} \sum_{\varphi \in \Phi(\boldsymbol{y})} \sigma(\varphi, x)$$

$$f(\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{x} \in P} \sum_{\varphi \in \Phi(\boldsymbol{y})} \sigma(\varphi, \boldsymbol{x}) - \omega|\boldsymbol{y}|$$

Pre symbol „Kroneckerovo delta“ platí: $\delta(i,j)=1$ pre $i=j$ a $\delta(i,j)=0$ pre $i \neq j$, symbol $\Phi(\boldsymbol{y}) \subseteq \Phi_{max}$ reprezentuje podmnožinu formačných formúl, ktoré sú špecifikované replikátorom $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, ..., y_{20}) \in \{0,1\}^{20}$ (pozri priesvitku 28). Tvar funkcie $f$ ($\boldsymbol{y}$) preferuje vznik emergenciu minimálnych podmnožín formačných funkcií, posledný ***penalizačný*** člen $\omega|\boldsymbol{y}|$ preferuje emergenciu kratších binárnych replikátorov.

# Konštrukcia minimálnej množiny formačných formúl pre emergenciu korektnej tabuľky pravdivostných hodnôt mocou koevolučného algoritmu

The above formulated Darwinian competitive coevolution postulated simultaneous emergency:

(1) replicator $\boldsymbol{x}_{opt}$ , which represents correct truth table of logic connectives,

(2) minimal set $\Phi_{opt}=\left\{\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},\ldots,\varphi_{i_b}\right\}\subseteq\Phi_{max}$, which induces correct truth table from the previous item (1).

A property of minimality of set $\Phi_{opt}=\left\{\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},\ldots,\varphi_{i_b}\right\}$ means that if we remove from the set any formula, then an emerged replicator $\boldsymbol{x}_{opt}$ does not represent a correct truth table of logical connectives. We rewrite fitness in the following form

$$f\left(\boldsymbol{x}\right)=\max_{\Phi\in Q}\left(\sigma\left(\boldsymbol{x};\Phi\right)-\omega\left|\Phi\right|\right)$$

$$f\left(\Phi\right)=\max_{x\in P}\sigma\left(\boldsymbol{x};\Phi\right)$$

In the first formula we take into account such a minimal set $\Phi_{opt} \in Q$, which maximize its contribution to fitness $f(\boldsymbol{x})$. This formula contains the so-called *penalization term* ω, which prefers an emergence of minimal set; in other words the fitness function $f(\boldsymbol{x})$ is penalized (its value is decreased proportionally to the number of components $|\Phi|$), i. e. most effective are those sets Φ that are composed of minimal number of necessary formulae.

For a description of coevolution let us introduce two population

$$P = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_a\} \subseteq \{0,1\}^{14} \text{ and } Q = \{\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ..., \varphi_{i_b}\} \subseteq \Phi_{max}$$

where the first population is composed of replicators that are representing truth tables of logic connectives and the second population is composed replicators specified by sets of propositional formulae from tab. 1. Let us note that this second population is inducing an emergence of replicators corresponding to truth tables.

Our goal is construct by a Darwinian coevolutionary theory such a minimal theory $\Phi_{min} \subseteq \Phi_{max}$, which induces a replicator $x_{min}$, which represents a correct truth table for logic connectives negation, conjunction, disjunction, and implication. If we tried to achieve this goal by making use of standard logical algorithm, then its interpretation is not transparent and simple. An application of Darwinian competitive coevolution makes possible to formulate transparent coevolutionary approach for a study of emergence of truth table of basic logic connectives that are induces by a minimal set $\Phi_{min}$

**Table.** Truth tables of logical connectives for different sets $\Phi_i$

| | *Negation* | | *conjunction* | | | | *Disjunction* | | | | *Implication* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.8 | 1 | 1 | 0.5 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.8 | 1 | 1 | 0.5 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.8 | 1 | 1 | 0.5 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.8 | 1 | 1 | 0.5 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.8 | 1 | 1 | 0.5 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 10-20 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

# Závery

- K tomu, aby sme mohli riešiť problematiku emergencie pravdivostnej tabuľky vzhľadom k vybranej množiny formačných formúl výrokovej logiky, musíme našu pozornosť upriamiť na koevolučné optimalizačné algoritmy založené na metafore Darwinovej kompetitívnej koevolúcie. V tomto prístupe evolučný systém je rozdelený na dva podsystémy (moduly), pričom evolúcia v každom podsystéme nie je úplne nezávislá, prostredníctvom výpočtu fitnes jeden podsystém interaguje s druhým.

- Pomocou koevolučných algoritmov sme študovali emergenciu tabuľky pravdivostných hodnôt logických spojok, ktorá je indukovaná vybranou množinou formačných formúl výrokovej logiky. Z týchto výpočtov emerguje binárny replikátor $\boldsymbol{x}_{opt}$ (reprezentujúci korektnú tabuľku pravdivostných hodnôt) a minimálna množina $\Phi_{min}$ formúl výrokovej logiky (ktorá indukuje korektnú tabuľku).

- Získané výsledky potvrdzujú ***hypotézu, že tabuľka pravdivostných hodnôt má svoju históriu.*** Od približnej, kde menovite disjunkcia a implikácia neboli úplne špecifikované, keď výroková logika bola neúplne špecifikovaná (grécky starovek), až po stredovek európskej kultúry, keď boli postulované a hlboko diskutované ďalšie a ďalšie formuly výrokovej logiky (napr. formula „reductio ad absurdum“

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$$

alebo ekvivalentné vyjadrenie implikácie pomocou disjunkcie a akceptovanie disjunkcie s inklúziou)

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$$


The End