

Ústav informatiky
Akademie věd České republiky

doc. RNDr. Jiří Šíma, CSc.

Neuronové sítě jako modely analogových výpočtů

Vědní obor: 020302 – Umělá inteligence

Autoreferát disertace k získání vědecké hodnosti
doktora technických věd

Praha, duben 2006

Disertace byla vypracována v Ústavu informatiky AV ČR za částečné podpory projektu 1M0545 MŠMT ČR.

Uchazeč:

doc. RNDr. Jiří Šíma, CSc.

Ústav informatiky, Akademie věd České republiky

Pod Vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8, Česká republika

E-mail: sima@cs.cas.cz, *URL:* <http://www.cs.cas.cz/~sima>

Oponenti:

Stanovisko k disertaci vypracoval ÚI AV ČR.

Autoreferát byl rozeslán dne:

Obhajoba disertace se koná dne:

před společnou Komisí pro obhajoby doktorských disertací v oboru
Informační a komunikační technologie, 020302 – Umělá inteligence

S disertací je možno se seznámit v knihovně ÚI AV ČR, Pod
Vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8, Česká republika.

prof. RNDr. Ľudovít Molnár, DrSc.

předseda společné Komise pro obhajoby ve vědním oboru

Informační a komunikační technologie

Fakulta informatiky a informačních technologií STU Bratislava

Ilkovičova 3, 842 16 Bratislava 4, Slovenská republika

1 Úvod

Předkládanou doktorskou disertační práci tvoří jednotný soubor 10 vybraných vědeckých článků autora z oboru neuronových sítí, které byly publikovány v posledním desetiletí, kdy autor byl zaměstnán v Oddělení teoretické informatiky Ústavu informatiky AV ČR v Praze. Součástí disertace je i stručný úvodní komentář, který články spojuje do jednotného tématického rámce a jehož zkrácenou verzi obsahuje tento autoreferát. Technicky jsou odkazy na uvedené publikace odlišeny v textu tučným fontem.

2 Současný stav problematiky

2.1 Neuronové sítě jako expertní systémy

Tzv. (*umělé*) *neuronové sítě* [75, 76, 107] představují velmi zjednodušené matematické modely nervových systémů živých organismů. Počítačové simulace neuronových sítí vykazují prvky „inteligentního“ chování, např. schopnost učit se a zobecňovat z tréninkových dat. Jeden směr výzkumu v této oblasti se snaží pochopit a modelovat, jakým způsobem myslíme a jak funguje lidský mozek. Na druhé straně tohoto úsilí stojí inženýři, kteří, inspirováni neurofyziologickými poznatky, modely neuronových sítí modifikují a navrhují neuropočítače, aby je mohli využít pro řešení praktických úloh z umělé inteligence. Neurovýpočty byly úspěšně aplikovány v oblastech, kde je návrh exaktních algoritmů problematický, např. rozpoznávání obrazců, řízení, predikce, rozhodování, analýza a transformace signálů, detekce chyb, expertní systémy, apod. Neuronové sítě se tak profilovaly jako samostatný informatický obor, což lze dokumentovat velkým počtem specializovaných mezinárodních odborných časopisů, konferencí, výzkumných projektů a výukových programů zabývajících se touto problematikou. Autor disertace je hlavním spoluautorem národní monografie [36], která kromě specializovaných teoretických partií obsahuje stručný úvod do neuronových sítí, zaměřený

na motivace a popis základních typových modelů. V česky mluvícím prostředí představovala tato práce jednu z prvních učebnic, která se doposud používá v úvodních kurzech neuronových sítí na vysokých školách v České i Slovenské republice.

Obecné principy neuronových sítí stručně připomeneme na problému reprezentace znalostí v expertních systémech, kterým se podrobně zabývá autorova práce [5]. Hlavní nevýhodou explicitní reprezentace znalostí, např. v pravidlových systémech, je časově náročné manuální vytváření báze znalostí, na kterém se obvykle podílí znalostní inženýr spolu se specialisty z daného oboru. Znalosti, intuice a zkušenosti expertů však obvykle nemají podobu konzistentních pravidel, a proto jejich reprezentace v počítačovém formalismu nemusí být adekvátní, i když se snaží postihnout neurčitost a nepřesnost znalostí pomocí numerických konfidencí. Odborník také nepoužívá v každé situaci formální logiku, ale často odvozuje řešení nového problému z předchozích úspěšně vyřešených případů. Navíc některé domény obsahují spíše numerická data než pravidla, např. vizuální obrazy, signály apod. Proto mohou původní znalosti experta být v explicitní počítačové reprezentaci deformovány natolik, že inferenční stroj z nich není schopen vyvodit správné závěry. Ladění báze znalostí je velmi náročný proces s nejistým výsledkem. Na druhou stranu explicitní reprezentace báze znalostí umožňuje pracovat průhledně s nepřesnou a neúplnou informací pomocí kalkulace nad konfidencemi pravidel a faktů, založeném např. na fuzzy logice. Také řetězec logických pravidel použitých při řešení konkrétního případu poskytuje uživateli dostatečné vysvětlení a zdůvodnění odvozeného řešení.

Alternativním řešením je reprezentace expertních znalostí pomocí modelů neuronových sítí. Báze znalostí je v tzv. *neuronových expertních systémech* [70] implementována neuronovou sítí, která je vytvářena automaticky pomocí učícího algoritmu adaptací na příkladové inference. Expert v tomto případě nemusí pracně formulovat pravidla, ale příklady jeho odpovědí v typických situacích před-

stavují tréninková data. Neuronová síť pak v procesu učení sama generalizuje pravidla z tréninkových vzorů a vytváří vnitřní reprezentaci znalostí pomocí vektoru váhových parametrů tak, aby požadovaná funkce zadaná daty byla co nejlépe aproximována neuronovou sítí. K dosažení tohoto cíle se obvykle používají numericky náročné metody nelineární optimalizace, které jsou realizovány (neuro)počítačem a zajišťují automatické ladění báze znalostí. Výsledná reprezentace znalostí v neuronové bázi je implicitní, protože kromě vstupních a výstupních proměnných nelze jednoduše přiřadit význam skrytým neuronům a numerickým vahám vyjadřujícím sílu jejich vzájemných vazeb. Inferenční stroj je implementován vlastním výpočtem neuronové sítě, která pro dané vstupní údaje o konkrétním případě odvodí na výstupu jeho řešení. Na druhou stranu při implicitní reprezentaci znalostí není zřejmé, jak pracovat s neúplnou a nepřesnou vstupní informací, a také verifikace a vysvětlení výstupních odpovědí jsou u neuronové sítě problematické. Z tohoto důvodu neuronové sítě nevyhovují některým základním požadavkům kladeným na expertní systémy.

Práce [5] srovnává výhody a nevýhody explicitní a implicitní reprezentace znalostí v pravidlových a neuronových expertních systémech z různých hledisek. Dále podává přehled strategií při integraci výhod obou přístupů v tzv. *hybridních systémech*, které jsou ilustrovány na příkladech existujících systémů. Možným řešením uvedených nedostatků neuronových expertních systémů je návrh heuristik, které analyzují implicitní reprezentaci neuronové báze znalostí a umožňují tak práci s neúplnou informací a vysvětlování závěrů. V práci [5] je popisována autorem navržená architektura prázdného neuronového expertního systému EXPSYS, která zobecňuje principy systému MACIE [69] pro analogové sítě, které lze učit pomocí nejúspěšnějšího algoritmu *zpětného šíření chyby (backpropagation)* [110]. Tento algoritmus je zobecněn pro intervalovou funkci neuronů, která v zásadě splňuje monotonii vzhledem k inkluzi intervalů (tj. zúplněním vstupních hodnot výstupní intervaly kontra-

hují) a představuje vhodný nástroj pro práci s neúplnou a nepřesnou vstupní informací. Neuronový expertní systém EXPSYS klade interaktivně uživateli vhodné dotazy a příp. poskytuje jednoduché zdůvodnění daného výstupu. Tento systém byl úspěšně aplikován při řešení několika praktických diagnostických problémů v medicíně a energetice [31, 35, 99].

Modely neuronových sítí tedy představují alternativní výpočetní paradigma, které je zajímavé nejen z hlediska studia biologických procesů v mozku člověka, ale které lze plodně využít pro praktické počítání při řešení algoritmicky těžko uchopitelných problémů. Tuto jejich schopnost jsme ilustrovali na problematice reprezentace znalostí v expertních systémech.

2.2 Výpočetní teorie neuronových sítí

Výzkum neurovýpočtů přinesl velké množství výsledků v podobě nových či modifikovaných ad hoc modelů a učících heuristik, jejichž použitelnost a efektivita jsou v odborné literatuře mnohdy ilustrovány jen na izolovaných či umělých datech. Experimentální výsledky jsou frekventovaně prezentovány tak, že je lze jen těžko porovnávat, ať již je to způsobeno tím, že aplikované postupy nejsou srovnatelné, nebo použité metody nejsou v komerčních produktech veřejně přístupné, či jsou dokonce chybné. Obecná hodnotící tvrzení o univerzalitě navrhovaných modelů neuronových sítí obvykle obsahují nepřesné formulace jako např. „generalizační schopnost“, „efektivní učení“ apod. Na jedné straně tedy stojí úspěšné inženýrské aplikace neuronových sítí při řešení referenčních i reálných praktických problémů, jejichž užitečnost nelze zpochybnit. Na druhou stranu nepostradatelný experimentální přístup při studiu vlastností neuronových sítí by měl být provázen snahou o rigorózní matematickou analýzu, protože modely neuronových sítí jsou definovány pomocí matematického formalismu. Hluboký teoretický vhled a porozumění principům a možnostem neurovýpočtů je předpokladem pro návrh efektivnějších algoritmů.

Základní výzkum, který přispívá k teoretické verifikaci výpočetního paradigmatu neuronových sítí, hraje v oboru neuronových sítí důležitou roli. Neurovýpočty se v reálných aplikacích potýkají s více problémy, jako je např. již zmiňovaná implicitní reprezentace znalostí, časově náročné učení, volba optimální síťové architektury (topologie) a počtu tréninkových vzorů atd., jejichž řešení by mohlo přispět k efektivnějšímu využití neuronových sítí v praxi. V této disertaci nám půjde především o výpočetní teorii neuronových sítí [51, 100, 104, 109, 111, 115, 122], která dává hlubší vhled do shora uvedených otázek. Teoretické výsledky mohou kromě praktického využití prohloubit naše chápání mentálních procesů, protože modely neuronových sítí byly původně inspirovány neurofyziologickými poznatky. Výpočetní aspekty neuronových sítí lze studovat ve třech hlavních směrech: efektivní vytváření a adaptace neuronové reprezentace znalostí (*složitost učení a generalizace*), její paměťová náročnost (*deskriptivní složitost*) a efektivní vybavování znalostí (*výpočetní síla*).

Přehled současného stavu problematiky v oblasti studia výpočetní síly a deskriptivní složitosti modelů neuronových sítí včetně jejich taxonomie je podrobně zpracován v autorově práci [8] (vycházející z jeho monografie [36]), která je součástí disertace. Uvedený přehled pokrývá tuto problematiku v celé šíři (na rozdíl od shora uvedených specializovanějších přehledových prací jiných autorů), obsahuje přes 150 referencí a byl vybrán jako hlavní článek pro číslo časopisu *Neural Computation* s největším impaktním faktorem v oboru neuronových sítí, kde aspiruje na postavení standardní reference. Více specializovaný přehled zaměřený na symetrické Hopfieldovy sítě obsahuje kapitola v knize [4], která tvůrčím způsobem začleňuje autorovy výsledky v této oblasti do jednotícího rámce pomocí konceptu tzv. energetického výpočetního zdroje. Podobně článek [3] ve své úvodní části obsahuje přehled výsledků o časové složitosti učení neuronových sítí. Navíc níže v kapitole 4 začleníme výsledky disertace do kontextu celkového výzkumu ve výpočetní teorii neuronových sítí.

3 Cíl a metody disertace

Cílem disertace je studium výpočetní síly neuronových sítí a analýza časové složitosti učení se zvláštním důrazem na analogové modely neuronových sítí, jejichž stavy jsou reálná čísla, a také na modely operující ve spojitém čase. Nicméně v práci se omezíme jen na digitální výpočty, jejichž vstupy a výstupy jsou ve své podstatě diskrétní veličiny, i když jsou často kódovány pomocí analogových stavů neuronů a vlastní výpočet neuronové sítě může pracovat s reálnými čísly.

Neuronové sítě představují výpočetní paradigma, které je alternativní ke konvenčnímu von Neumannovu modelu. Výpočetní potenciál a limity konvenčních počítačů jsou analyzovány pomocí klasických modelů, např. Turingových strojů. Analogicky bylo v posledních 15 letech dosaženo mnoho fundamentálních výsledků týkajících se schopnosti neuronových sítí implementovat univerzální výpočty. Výpočetní síla neuronových sítí se obvykle studuje tak, že se různé modely sítí porovnávají nejen mezi sebou, ale především s tradičními popisnými prostředky a výpočetními modely jako jsou konečné automaty, regulární výrazy, gramatiky, Turingovy stroje, booleovské obvody apod. Cílem tohoto přístupu je zjistit, co lze v principu nebo efektivně spočítat pomocí jednotlivých modelů neuronových sítí, resp. jak implementovat požadovanou funkci optimálním způsobem. Hlavním technickým nástrojem tohoto výzkumu je výpočetní teorie složitosti [53, 61, 103], příp. formální teorie jazyků [49]. Navíc neuronové sítě obohacují tradiční repertoár formálních výpočetních modelů, které jsou obvykle parametrizovány časem a prostorem (časová a paměťová složitost), o nové zdroje efektivního počítání jako jsou např. *analogové stavy* [111], *spojitý čas* [102], *energie* [4] apod. Neuronové sítě v tomto případě aspirují na to, aby se staly referenčními modely při studiu těchto alternativních výpočetních zdrojů.

V oblasti studia časové složitosti učení dopředných neuronových sítí nám půjde o to, zda negativní výsledky o efektivní nenaučitelnosti (v nejhorsším případě), které byly dokázány pro diskrétní

modely sítí, jsou platné i pro v praxi používané analogové modely, jejichž učící algoritmy (např. backpropagation) jsou založené na optimalizaci gradientní metodou. Bez teoretické analýzy této otázky nelze vyloučit možnost, že NP-úplnost problému učení je u těchto výsledků způsobená diskretizací modelu, jako je tomu např. při učení jednoho perceptronu s binárními váhami, které je NP-úplné [105], ačkoliv pro racionální váhy je řešitelné v polynomiálním čase pomocí lineárního programování [86] (pokud je úloha lineárně separovatelná). Zobecnění NP-úplnosti učení pro analogové modely bylo považováno za jednu z nejdůležitějších otevřených otázek teorie učení neuronových sítí [64, 77, 93, 119].

4 Výsledky disertace

V této kapitole jsou stručně prezentovány původní výsledky disertace v kontextu existujícího výzkumu ve výpočetní teorii neuronových sítí.

4.1 Výpočetní síla neuronových sítí

Výpočetní modely neuronových sítí lze klasifikovat podle typu architektury (topologie) na dopředné (acyklické) nebo rekurentní (cyklické), podle časové dynamiky na diskrétní nebo spojitě sítě, podle domény stavů na binární nebo analogové sítě, podle omezení na váhové parametry na symetrické nebo asymetrické sítě, podle typu vstupního protokolu na konečné sítě nebo nekonečné posloupnosti sítí atd. Kombinací těchto omezení dostáváme bohatou taxonomii modelů neuronových sítí, které mají různou výpočetní sílu. V této práci se omezíme jen na tradiční *perceptronové* sítě, resp. na jejich analogové verze, i když její autor se podílel na nedávném studiu výpočetních aspektů alternativních modelů *RBF (Radial Basis Functions)* sítí [45] a také výpočetní síla biologicky více plauzibilních sítí tzv. *pulzních (spiking)* neuronů, které používají časového kódování informace, je v poslední době předmětem intenzivního výzkumu (viz přehled [8]).

Binární dopředné (acyklické) perceptronové sítě odpovídají (prahovým) obvodům, které jsou studovány v teorii obvodů a booleovské složitosti [120] zabývající se fundamentálními otevřenými problémy výpočetní teorie. Například jsou známy optimální implementace důležitých booleovských funkcí (symetrické [114] a obecné [82] funkce, aritmetické operace [109] apod.) pomocí prahových obvodů nebo je dokázáno, že v rámci polynomiální *velikosti* (počet neuronů) jsou třívrstvé neuronové sítě silnějším výpočetním prostředkem než dvouvrstvé [73]. Dále *analogové acyklické* neuronové sítě se sigmoidální aktivační funkcí (např. standardní logistickou sigmoidou) a konstantním počtem vrstev (*hloubkou*), které se používají v učícím algoritmu backpropagation, mají v rámci polynomiální velikosti stejnou výpočetní sílu jako jejich binární verze stejné hloubky [96], i když některé funkce lze počítat pomocí analogových sítí s menším počtem neuronů [63].

Výpočetní síla *konečných rekurentních (cyklických) asymetrických* neuronových sítí (se satureovanou lineární aktivační funkcí) pracujících v *diskrétním čase* roste s kolmogorovskou složitostí váhových parametrů [54]. Například sítě s celočíselnými váhami (tj. binární sítě) odpovídají konečným automatům (tzv. *neuromatům*) rozpoznávajícím právě regulární jazyky [89]. Pomocí analogových sítí s racionálními váhami lze v reálném čase simulovat univerzální Turingův stroj s malým konstantním počtem neuronů [84, 113]. Analogové neuronové sítě s obecnými reálnými váhami pak mají „super-turingovské“ výpočetní schopnosti, např. polynomiální výpočty odpovídají neuniformní třídě složitosti $P/poly$ a v exponenciálním čase lze pomocí nich počítat již všechny funkce [112]. Na druhou stranu libovolně malý analogový šum redukuje jejich výpočetní sílu na nejvýše konečné automaty [95, 97].

V případě neuromatů se uvažují jemnější popisné míry složitosti, které jsou důležité při praktické neuronové implementaci konečných automatů. Pro konečný (deterministický) automat s m stavy lze zkonstruovat ekvivalentní neuromat velikosti $O(\sqrt{m})$ [83, 84], což v nejhorším případě nelze zlepšit za předpokladu buď nej-

výše $O(\log m)$ časového zpoždění simulace [83], nebo polynomiálních vah [84]. Naproti tomu práce [10] porovnává deskriptivní sílu neuromatů s regulárními výrazy, které mohou popsat regulární jazyk efektivněji než konečné automaty. Nejprve je ukázáno, že konstantní časové zpoždění akceptace vstupního slova lze u každého neuromatu odstranit za cenu jen lineárního nárůstu jeho velikosti. Dále je navržena konstrukce neuromatu velikosti $O(m)$, který rozpoznává regulární jazyk zadaný regulárním výrazem délky m . Je dokázáno, že tato konstrukce je z hlediska počtu neuronů optimální. Navíc existuje regulární jazyk, který lze rozpoznat neuromatem velikosti $O(m)$, ale délka každého regulárního výrazu, který jej popisuje, je $\Omega(2^m)$. To znamená, že neuromaty jsou prokazatelně silnějším popisným prostředkem než regulární výrazy. Tento fakt je ilustrován na problému prázdného jazyka (otázka, zda je daný jazyk neprázdný), který je pro neuromaty $PSPACE$ -úplný, zatímco pro regulární výrazy pouze NL -úplný.

Binární rekurentní neuronové sítě lze v reálném čase spolehlivě simulovat pomocí analogových sítí stejné velikosti tak, že nepřesnost aritmetických operací nad reálnými čísly neovlivní správnost libovolně dlouhého výpočtu. Tato simulace je popsána v dalším článku [2] a je platná pro velkou třídu aktivačních funkcí, které mají různé konečné limity v nevlastních bodech. Díky ní pak pro konečné automaty nebo regulární výrazy dostáváme prakticky použitelné ekvivalentní analogové neuromaty stejné velikosti jako ve shora uvedeném binárním případě. Podobné výsledky lze dosáhnout pro konečné rekurentní asymetrické analogové neuronové sítě pracující ve *spojitém čase* [102].

Další důležitou třídou neuronových sítí jsou tzv. *Hopfieldovy (symetrické) sítě*, které mají symetrické spoje (váhy) mezi neurony. Pro tyto sítě lze za určitých předpokladů ukázat, že konvergují pro každý vstup ke stabilnímu stavu [62, 79, 80, 90, 106], a proto lze použít jako asociativní paměti. Díky odlišným konvergenčním vlastnostem jsou Hopfieldovy sítě zřejmě slabším výpočetním prostředkem než jejich asymetrické verze. Avšak v práci [9] je pro binární sítě

ukázáno, že pokud vyloučíme nezajímavé nekonečné oscilace, pak symetrické a konvergentní asymetrické sítě mají stejnou výpočetní sílu. Konkrétně byla ukázána obrácená implikace slavné Hopfieldovy konvergenční věty, tj. nejen že všechny binární symetrické sítě konvergují, ale všechny konvergentní výpočty binární asymetrické neuronové sítě mohou být efektivně implementovány pomocí Hopfieldovy sítě za cenu jen lineárního nárůstu času výpočtu a velikosti simulující sítě. Tento fakt má praktické důsledky, protože rekurentní sítě s asymetrickými spoji lze tak vždy nahradit symetrickými sítěmi (s nevelkou režií na jejich velikost a výpočetní čas), které vždy konvergují a v některých technologiích mají efektivnější implementace.

Navíc shora uvedená stabilní analogová simulace binárních neuronových sítí lze jednoduše upravit i pro symetrické sítě [2], čímž lze dosáhnout analogové symetrické simulace konvergentních binárních asymetrických neuronových sítí. Nakonec v práci [6] je tato simulace zobecněna i pro spojitý čas, kdy dynamika Hopfieldovy sítě se saturovanou lineární aktivační funkcí je zadána soustavou diferenciálních rovnic. Netriviální důkaz korektnosti spojitě simulace je technicky velmi náročnou analýzou řešení takové soustavy. Tím je matematicky dokázáno, že i velmi jednoduchý dynamický systém s Ljapunovovou (energetickou) funkcí, typickou právě pro symetrické sítě, je z hlediska diskrétních výpočtů univerzální. Uvedený výsledek je jedním z prvních známých dolních odhadů výpočetní síly analogových výpočtů ve spojitém čase a je fundamentálním příspěvkem k teorii spojitých výpočtů [58, 72].

Na druhou stranu konečné symetrické neuromaty s předem neomezenou délkou vstupního slova nejsou schopny rozpoznat všechny regulární jazyky. V již zmiňované práci [10] je pomocí symetrických neuromatů definována třída tzv. *Hopfieldových jazyků*, která je vlastní podtřídou regulárních jazyků. Tato třída je uzavřena na sjednocení, průnik a doplněk, ale není uzavřena vůči iteraci. Byla též nalezena její přesná charakterizace pomocí nutné a postačující podmínky, která určuje, kdy je daný regulární jazyk Hopfieldův. Po-

dobná podmínka přesně charakterizuje „energetický“ vstupní signál, který umožní analogovou symetrickou simulaci analogové asymetrické sítě pro saturevanou lineární aktivační funkci [9]. Z ní pak vyplývá, že konečné analogové Hopfieldovy sítě s racionálními váhami a uvedeným energetickým zdrojem jsou turingovsky univerzální.

Další zajímavou otázkou je *čas konvergence* Hopfieldových sítí. Triviální horní odhad 2^n pro n binárních neuronů lze v nejhorším případě doplnit exponenciálním dolním odhadem $\Omega(2^{n/3})$ pomocí ne úplně jednoduché konstrukce symetrického binárního čítače [71]. Také relativně rychlá konvergence v průměrném případě je již dlouhou dobu známa [91]. Nicméně pro srovnání těchto výsledků s časem konvergence analogových neuronových sítí je potřeba vzít v úvahu nejen počet neuronů, ale i délku bitové reprezentace reálných váhových parametrů, tj. deskriptivní složitost sítě. V práci [9] je uvedený dolní a horní odhad upřesněn po řadě na $2^{\Omega(M^{1/3})}$ a $2^{O(M^{1/2})}$ pro binární symetrickou síť, která je popsána pomocí M bitů. Dále byl zkonstruován speciálně upravený analogový symetrický čítač, který konverguje až po $2^{\Omega(g(M))}$ krocích, kde $g(M)$ je libovolná spojitá funkce taková, že $g(M) = \Omega(M^{2/3})$, $g(M) = o(M)$ a $M/g(M)$ je rostoucí, což představuje první známý dolní odhad času konvergence analogového výpočtu. Uvedená analogová symetrická síť tak konverguje později než každá binární Hopfieldova síť se stejnou popisnou složitostí. V článku [7] byl tento výsledek dokonce dokázán pro spojitý čas. Z uvedeného vyplývá, že analogové modely výpočtu mohou být efektivnější než ty binární, i když omezíme jejich teoretickou schopnost počítat s reálnými čísly neomezené přesnosti.

Hopfieldovy sítě se také často využívají při heuristickém řešení obtížných úloh kombinatorické optimalizace [48, 81]. Účelová funkce příslušného optimalizačního problému spolu s podmínkou přípustnosti řešení je zakódována do Ljapunovovy (energetické) funkce, jejíž hodnota při každém výpočtu symetrické sítě konverguje k lokálnímu minimu. Např. autor disertace úspěšně aplikoval tento postup při řešení důležitého problému optimální stripifikace triangulovaných 3D obrázků z výpočetní geometrie, kde navíc dokázal, že třídy

ekvivalentních optimálních stripifikací odpovídají vzájemně jednoznačně stavům Hopfieldovy sítě s minimální energií [29]. Problém nalezení stavu Hopfieldovy sítě s minimální energií (tzv. *problém MIN ENERGY*) je také důležitý u modelů spinových skel ve statistické fyzice [55]. Avšak v případě binárních Hopfieldových sítí je známo, že MIN ENERGY je NP-úplný problém [55]. Nicméně v práci [9] je přibližné řešení problému maximálního řezu v grafu využito při návrhu polynomiální aproximativního algoritmu pro MIN ENERGY se zárukou absolutní chyby nejvýše $0.234W$, kde W je součet absolutních hodnot vah sítě. Pro analogové sítě, které se obvykle používají při heuristické optimalizaci, je pak v článku [9] dokázáno, že problém MIN ENERGY je NP-těžký i pro velkou třídu aktivačních funkcí, která pokrývá všechny funkce obvykle používané v praktických aplikacích.

Nakonec se také uvažují nekonečné (neuniformní) *posloupnosti neuronových sítí* pro rostoucí délku vstupu. Například polynomiálně velké binární neuronové sítě odpovídají (neuniformní) složitostní třídě $PSPACE/poly$ [101]. Z předchozího výkladu o symetrických sítích vyplývá, že stejný výsledek platí i pro Hopfieldovy sítě. Speciálně posloupnosti polynomiálně velkých Hopfieldových sítí s polynomiálními váhami odpovídají třídě $P/poly$. Podle [2, 6] pak dostáváme, že příslušné posloupnosti symetrických analogových neuronových sítí pracujících v diskrétním nebo spojitém čase rozpoznávají aspoň jazyky z třídy $PSPACE/poly$.

Uvedený stručný přehled výsledků výpočetní síly neuronových sítí ukazuje na bohatost používaných modelů, jejichž možnosti teoreticky pokrývají celou škálu prostředků od subregulárních až po super-turingovské. Avšak pro praktické neurovýpočty mají zatím význam především binární (digitální) modely nebo jejich analogové implementace, tj. např. prahové obvody a neuromaty. Analogové neuronové sítě pracující s neomezenou přesností reálných parametrů představují první teoretické idealizace v praxi používaných analogových výpočtů. Zdá se, že zjemněním příslušných definic bychom

mohli obdržet realističtější analogové modely, které by mohly obohatit výpočetní sílu a efektivitu binárních neuronových sítí.

4.2 Složitost učení a generalizace

Nejdůležitější vlastností neuronových sítí je jejich schopnost učit se a zobecňovat z dat. Výpočetní aspekty tohoto jevu jsou studovány v obecném rámci známého *PAC (Probably Approximately Correct)* modelu učení [117], který dal vznik novému informatickému odvětví – *výpočetní teorii učení* [50, 52, 88, 119]. Pro vzorky neznámého cílového konceptu (z dané třídy konceptů), které jsou předkládány ve shodě s neznámým pevným pravděpodobnostním rozdělením, polynomiální učící PAC algoritmus generuje hypotézu, která s požadovanou *konfidencí* aproximuje cílový koncept s předepsanou *přesností* měřenou vzhledem k příslušné distribuci. Neuronová síť může reprezentovat koncept tak, že počítá jeho charakteristickou funkci, která klasifikuje, zda daný vstup je instancí konceptu. V tomto směru bylo dosaženo mnoha důležitých výsledků a všeobecně je přijímán názor, že formulace PAC modelu je matematicky rigorózním rámcem pro studium intuitivní představy, že neuronová síť má generalizační schopnosti. Modely neuronových sítí tak slouží jako testovací a aplikační oblast obecné teorie učení, ale také jako zdroj motivací pro její další výzkum.

Jedním z hlavních proudů výpočetní teorie učení je studium tzv. *vzorkové složitosti*, tj. optimálního počtu tréninkových vzorů pro správnou PAC generalizaci. Tato otázka je zřejmě nezávislá na způsobu reprezentace konceptů a časové složitosti učícího algoritmu. Horní odhad $O((1/\varepsilon) \log(1/\delta) + (VC(\mathcal{K})/\varepsilon) \log(1/\varepsilon))$ vzorkové složitosti [60], který téměř odpovídá dolnímu odhadu [66], závisí na požadované konfidenci δ a přesnosti ε učícího algoritmu v PAC modelu a také na tzv. *VC-dimenzi* [118] $VC(\mathcal{K})$ třídy konceptů \mathcal{K} . Za tímto účelem byla stanovena VC-dimenze pro některé modely neuronových sítí: např. $n+1$ pro perceptron s n vstupy [121], $\Theta(w \log w)$ pro binární acyklické sítě s w váhami [57, 94], $O(w^4)$ pro analogové dopředné sítě s logistickou sigmoidou [87] apod. Z uvedeného vyplývá,

že pro správnou PAC generalizaci používaných modelů neuronových sítí je polynomiální počet tréninkových vzorů postačující. Na druhou stranu existuje jednoduchý umělý příklad aktivační funkce, pro kterou má analogová neuronová síť nekonečnou VC-dimenzi [116], a tedy není schopna PAC generalizace.

Avšak polynomiální vzorková složitost není postačující k efektivnímu PAC učení. Naučitelnost třídy polynomiálně reprezentovaných konceptů v PAC modelu vyžaduje kromě polynomiální VC-dimenze i existenci polynomiálního pravděpodobnostního algoritmu pro tzv. *loading problém* [60], který představuje nalezení příslušné reprezentace konceptu, která je konzistentní s danými tréninkovými daty. Pro neuronové sítě to znamená najít pro danou topologii sítě a tréninková data takový vektor váhových parametrů, že výsledná síť pro vstupy z tréninkové množiny odpovídá požadovanými výstupy. Prvním příspěvkem k otázce složitosti loading problému u neuronových sítí byla práce S. Judda [85], v níž je dokázáno, že loading problém pro dopředné neuronové sítě je obecně NP-úplný. Tento výsledek platí, i když klademe velmi silná omezení na topologii sítě a tréninkové vzory (např. jen 2 vstupy sítě, 1 skrytá vrstva, vstupní stupeň neuronu nejvýše 3, 3 tréninkové vzory, apod.). Přesto se nakonec podařilo najít polynomiální loading algoritmus pro speciální třídu topologií (tzv. mělké architektury s omezeným „treewidth“ grafu interakcí kuželů), jehož praktická použitelnost závisí na existenci efektivního algoritmu pro hluboké architektury. V článku [15] autor disertace ukázal, že loading problém pro hluboké architektury je NP-úplný. Tento výsledek byl dále zesílen v pracích [65, 124]. Navíc pro neuronové sítě vyššího řádu, které místo zvážené sumy vstupů počítají polynom, je loading problém pro celočíselné váhy dokonce algoritmicky nerozhodnutelný [123].

V recenzi [56] zmiňované práce [85] je poukázáno na fakt, že Juddův důkaz NP-úplnosti loading problému závisí podstatně na nepravidelnosti topologie neuronové sítě, zatímco v praxi se obvykle používá např. vrstevnatá architektura s regulárním propojením. Proto byl podán alternativní důkaz NP-úplnosti loading pro-

blému pro dvouvrstvou binární síť, která má jen 3 neurony [59], nebo pro kaskádovou binární síť se 2 neurony [92], což jsou nejmenší instance v praxi nejčastěji používaných architektur neuronových sítí. Dalším argumentem zpochybňujícím adekvátnost těchto výsledků pro praktické neurovýpočty byla jejich platnost omezená na binární síť, zatímco např. prakticky nejúspěšnější učící algoritmus backpropagation pracuje jen s analogovými sítěmi. Proto byla snaha zobecnit uvedené výsledky i pro diferencovatelnou logistickou sigmoidu používanou právě v algoritmu backpropagation. V publikacích [64, 77, 93, 119] byl tento problém označen za jednu z nejdůležitějších otevřených otázek teorie učení neuronových sítí. Tato otázka je vyřešena v práci [1], kde je ukázáno, že loading problém pro dvouvrstvou analogovou síť 3 neuronů s logistickou sigmoidou je NP-těžký. Uvedený výsledek navíc vyžaduje technický předpoklad, který je například splněn pro nulový práh výstupního neuronu. Tento předpoklad byl nahrazen jinou podmínkou na váhy výstupního neuronu, za které výsledek platí i pro celou třídu aktivačních funkcí [74]. Z předchozího vyplývá, že backpropagation není efektivní algoritmus, pokud $NP \neq P$.

Jak už bylo řečeno, efektivní generalizace neuronových sítí vyžaduje efektivní pravděpodobnostní algoritmus pro řešení příslušného loading problému. Přesněji, třídu konceptů reprezentovatelných neuronovými sítěmi deskriptivní polynomiální složitosti, pro než je loading problém NP-těžký, nelze naučit v PAC modelu za všeobecně přijímaného předpokladu $RP \neq NP$ [105]. To znamená, že binární i analogové dopředné neuronové sítě nejsou obecně schopny efektivně generalizovat.

Hlavní problém spočívá právě ve výpočetní složitosti loading problému, který předpokládá předepsanou pevnou topologii sítě na vstupu. Možným východiskem z této situace by mohly být tzv. *konstruktivní učící algoritmy* [67, 68, 98], které hledají optimální topologii neuronové sítě, pro kterou by loading problém nebyl těžký. U jedné třídy konstruktivních učících algoritmů se obvykle postupně přidávají další neurony v případě, že chyba sítě pro danou architek-

туру již neklesá. Tento postup vyžaduje efektivní algoritmus pro učení jednoho (přidaného) neuronu. Avšak i v případě jednoho perceptronu nastává problém, pokud příslušné vzory nejsou lineárně separovatelné [78, 108]. V článku [3] je dokázáno, že nalezení váhových parametrů jednoho analogového neuronu, které by minimalizovaly kvadratickou tréninkovou chybu v rámci jisté tolerance od infima, je NP-těžké pro velkou třídu aktivačních funkcí (včetně např. logistické sigmoidy nebo lineární satureované funkce). Tento fundamentální výsledek o nenaučitelnosti jednoho analogového neuronu má negativní důsledky pro konstruktivní učení neuronových sítí. Autor disertace se také podílel na zobecnění tohoto výsledku pro jeden spiking neuron [42].

V předchozím výčtu výsledků jsme se zaměřili na složitostní aspekty učení neuronových sítí, i když v uvedené oblasti převládá spíše statistický výzkum. Nicméně se ukazuje, že bez výpočetní analýzy není pravděpodobně možné navrhnout efektivní učící algoritmy, které by zvládly větší praktické úlohy.

5 Závěr

V této kapitole ještě stručně shrneme hlavní přínos předkládané práce:

- Problematika neuronových sítí ve srovnání s konvenčními počítači byla ilustrována na reprezentaci znalostí v expertních systémech. Kromě přehledu strategií v hybridních modelech byla navržena architektura prakticky použitelného neuronového expertního systému, který pomocí intervalové aritmetiky pracuje s neúplnou a nepřesnou informací a podává jednoduché vysvětlení závěrů. Tyto vlastnosti jsou v kontextu neuronové implicitní reprezentace spíše výjimkou a řešení souvisejících problémů představuje původní autorův příspěvek v oblasti neuronového zpracování znalostí.
- Další výsledky práce se týkají výpočetní teorie neuronových sítí. Byla úplně charakterizována deskriptivní složitost neu-

romatů ve vztahu k regulárním výrazům a příslušný důkaz poskytuje prakticky použitelnou konstrukci neuronového automatu. Prostřednictvím symetrických neuromatů byla definována subregulární třída Hopfieldových jazyků, které obohacují klasické hierarchie tříd jazyků. Byla nalezena nutná a postačující podmínka, kdy je daný regulární jazyk Hopfieldův.

- V práci je dokázána obrácená implikace slavné Hopfieldovy konvergenční věty, což znamená, že binární Hopfieldovy sítě se symetrickými váhami mají v rámci lineární velikosti a času stejnou výpočetní sílu jako konvergentní binární asymetrické neuronové sítě. Čas konvergence Hopfieldových sítí je vyjádřen vzhledem k jejich deskriptivní složitosti, což umožňuje srovnání s analogovými sítěmi, u kterých rozhoduje přesnost reálných parametrů. Byla zkonstruována analogová symetrická síť, jejíž výpočet skončí později než výpočet libovolné binární Hopfieldovy sítě se stejnou délkou reprezentace. To znamená, že analogové modely mohou mít větší výpočetní sílu, i když omezíme přesnost jejich reálných parametrů. Také byla zkoumána složitost nalezení stavu Hopfieldovy sítě s nízkou energií, která je důležitá pro optimalizační aplikace. Bylo dokázáno, že tento problém je i pro analogové symetrické sítě NP-těžký.
- Uvedené teoretické výsledky byly zobecněny pro analogové modely neuronových sítí tak, že pro velkou třídu aktivačních funkcí byla navržena prakticky použitelná obecná stabilní analogová simulace binárních sítí. Dále byla navržena netriviální simulace konvergentních binárních asymetrických sítí pomocí analogových Hopfieldových sítí pracujících ve spojitém čase. To dokazuje, že i spojitý dynamický systém, jehož chování je striktně omezeno Ljapunovovou funkcí, je výpočetně univerzální. Také byl zkonstruován spojitý Ljapunovský dynamický systém, jehož doba konvergence je exponenciální vzhledem k jeho dimenzi. Dosažené výsledky jsou zajímavým příspěvkem ke studiu ana-

logových a spojitých výpočtů, protože neuronové sítě v této oblasti slouží jako jeden z referenčních výpočetních modelů.

- V práci je také analyzována časová složitost učení neuronových sítí. Byla dokázána NP-úplnost loading problému pro dopředné analogové sítě se standardní logistickou sigmoidou (dokonce i pro jeden analogový neuron), které se učí pomocí v praxi nejčastěji používaného učícího algoritmu backpropagation. Tato otázka byla mnohými odborníky považována za jeden z nejdůležitějších otevřených problémů v této oblasti.

Předchozí stručný výčet hlavních výsledků ukazuje, že předkládaná disertace podstatně obohacuje naše poznání výpočetních vlastností analogových modelů neuronových sítí a splňuje cíle vytyčené v kapitole 3.

Seznam publikací tvořících disertaci

- [1] J. Šíma: Back propagation is not efficient. *Neural Networks*, **9**(6):1017–1023, 1996.
- [2] J. Šíma: Analog stable simulation of discrete neural networks. *Neural Network World*, **7**(6):679–686, 1997.
- [3] J. Šíma: Training a single sigmoidal neuron is hard. *Neural Computation*, **14**(11):2709–2728, 2002.
- [4] J. Šíma: Energy-based computation with symmetric Hopfield nets. Chapter in S. Ablameyko, M. Gori, L. Goras, and V. Piuri (eds.): *Limitations and Future Trends in Neural Computation*, NATO Science Series: Computer & Systems Sciences, Vol. 186, pp. 45–69, Amsterdam: IOS Press, 2003.
- [5] J. Šíma, J. Červenka: Neural knowledge processing in expert systems. Chapter in I. Cloete, J.M. Zurada (eds.): *Knowledge-Based Neurocomputing*, pp. 419–466, Cambridge, MA: The MIT Press, 2000.
- [6] J. Šíma, P. Orponen: Continuous-time symmetric Hopfield nets are computationally universal. *Neural Computation*, **15**(3):693–733, 2003.
- [7] J. Šíma, P. Orponen: Exponential transients in continuous-time Liapunov systems. *Theoretical Computer Science*, **306**(1-3):353–372, 2003.

- [8] J. Šíma, P. Orponen: General-purpose computation with neural networks: A survey of complexity theoretic results. *Neural Computation*, **15**(12):2727–2778, 2003.
- [9] J. Šíma, P. Orponen, T. Antti-Poika: On the computational complexity of binary and analog symmetric Hopfield nets. *Neural Computation*, **12**(12):2965–2989, 2000.
- [10] J. Šíma, J. Wiedermann: Theory of neuromata. *Journal of the ACM*, **45**(1):155–178, 1998.

Seznam dalších nejdůležitějších publikací autora

- [11] P. Savický, J. Šíma, S. Žák: An explicit polynomial size hitting set for restricted 1-branching programs of width 3. Technical Report V-953, ICS AS CR, Prague, 2005.
- [12] J. Šíma: Generalized back propagation for interval training patterns. *Neural Network World*, **2**(2):167–174, 1992.
- [13] J. Šíma: The multi-layered neural network as an adaptive expert system with the ability to work with incomplete information and to provide justification of inference. *Neural Network World*, **2**(1):47–58, 1992.
- [14] J. Šíma: Generalized back propagation for training pattern derivatives. *Neural Network World*, **4**(1):91–98, 1994.
- [15] J. Šíma: Loading deep networks is hard. *Neural Computation*, **6**(5):842–850, 1994.
- [16] J. Šíma: Neural learning is not efficient. *Proceedings of the SOFSEM'94 Winter Seminar*, pp. 107–110, Brno: ÚVT MU, 1994.
- [17] J. Šíma: Hopfield languages. *Proceedings of the SOFSEM'95 Twenty-Fifth Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 461–468, LNCS 1012, Berlin: Springer-Verlag, 1995.
- [18] J. Šíma: Neural expert systems. *Neural Networks*, **8**(2):261–271, 1995.
- [19] J. Šíma: Aunt's problem: Table rounding. *Proceedings of the SOFSEM'96 Twenty-Third Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 441–450, LNCS 1175, Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [20] J. Šíma: Author's response. Letter to the editor, *Neural Networks*, **10**(8):1534, 1997.

- [21] J. Šíma: Introduction to neural networks. Technical Report V-755, ICS AS CR, Prague, 1998, 83 pp.
- [22] J. Šíma: Book review: A theory of learning and generalization by M. Vidya-sagar. *Neural Network World*, **9**(1-2):175–178, 1999.
- [23] J. Šíma: Table rounding problem. *Computers and Artificial Intelligence*, **18**(2): 175–189, 1999.
- [24] J. Šíma: Review of integration strategies in neural hybrid systems. E-ISCI'2000 Euro-International Symposium on Computational Intelligence, In *Quo Vadis Computational Intelligence? New Trends and Approaches in Computational Intelligence*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 54, pp. 355–360, Berlin: Springer Verlag, 2000.
- [25] J. Šíma: Minimizing the quadratic training error of a sigmoid neuron is hard. *Proceedings of the ALT'2001 Twelfth International Conference on Algorithmic Learning Theory*, pp. 92–105, LNAI 2225, Berlin: Springer Verlag, 2001.
- [26] J. Šíma: The computational capabilities of neural networks (extended abstract). Invited tutorial. *Proceedings of the ICANNGA'2001 Fifth International Conference on Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms*, pp. 22–26, Vienna: Springer Verlag, 2001.
- [27] J. Šíma: On the complexity of training a single perceptron with programmable synaptic delays. *Proceedings of the ALT'2003 Fourteenth International Conference on Algorithmic Learning Theory*, pp. 221–233, LNAI 2842, Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [28] J. Šíma: Generating sequential triangle strips by using Hopfield nets. *Proceedings of the ICANNGA'2005 Seventh International Conference on Adaptive and Natural Computing Algorithms*, pp. 25–28, Vienna: Springer Verlag, 2005.
- [29] J. Šíma: Optimal triangle stripifications as minimum energy states in Hopfield nets. *Proceedings of the ICANN'2005 Fifteenth International Conference on Artificial Neural Networks*, pp. 199–204, LNCS 3696, Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [30] J. Šíma, P. Mančal, J. Bouzek: *Numerické zpracování výsledků kvantitativních imunochemických analytických metod na mikropočítači*. Praha: ÚSOL, 1985, 50 str.
- [31] J. Šíma, R. Neruda: Neural expert systems. *Proceedings of the IJCNN'92 Sixth International Joint Conference on Neural Networks*, Vol. 3, pp. 634–639, Publishing House of Electronic Industry, 1992.

- [32] J. Šíma, R. Neruda: Neural networks as expert systems. *Neural Network World*, **2**(6):775–784, 1992.
- [33] J. Šíma, R. Neruda: Designing neural expert systems with EXPSYS. Technical Report V-563, ICS AS CR, Prague, 1993.
- [34] J. Šíma, R. Neruda: EXPSYS—a tool for neural expert system design. *Proceedings of the NEURONET'93 Conference*, Praha, 1993.
- [35] J. Šíma, R. Neruda: The empty expert system and its application in medicine. *Proceedings of the EMCSR'94 Twelfth European Meeting on Cybernetics and Systems Research*, pp. 1825–1832, Singapore: World Scientific, 1994.
- [36] J. Šíma, R. Neruda: *Teoretické otázky neuronových sítí*. Praha: MATFYZ-PRESS, 1996, 390 str.
- [37] J. Šíma, P. Orponen: A continuous-time Hopfield net simulation of discrete neural networks. *Proceedings of the NC'2000 Second International ICSC Symposium on Neural Computation*, pp. 36–42, ICSC Academic Press, 2000.
- [38] J. Šíma, P. Orponen: Computing with continuous-time Liapunov systems. *Proceedings of the STOC'2001 Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 722–731, New York: ACM Press, 2001.
- [39] J. Šíma, P. Orponen: Exponential transients in continuous-time symmetric Hopfield nets. *Proceedings of the ICANN'2001 Eleventh International Conference on Artificial Neural Networks*, pp. 806–813, LNCS 2130, Berlin: Springer Verlag, 2001.
- [40] J. Šíma, P. Orponen, T. Antti-Poika: Some afterthoughts on Hopfield networks. *Proceedings of the SOFSEM'99 Twenty-Sixth Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 453–462, LNCS 1725, Berlin: Springer Verlag, 1999.
- [41] J. Šíma, S.E. Schaeffer: On the NP-completeness of some graph cluster measures. *Proceedings of the SOFSEM 2006 Thirty-Second International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science*, pp. 530–537, LNCS 3831, Berlin: Springer Verlag, 2006.
- [42] J. Šíma, J. Sgall: On the non-learnability of a single spiking neuron. *Neural Computation*, **17**(12):2635–2647, 2005.
- [43] J. Šíma, J. Wiedermann: Neural language acceptors. *Proceedings of the DLT'95 Second International Conference on Developments on Language Theory*, pp. 430–439, Singapore: World Scientific, 1996.

- [44] M. Šorel, J. Šíma: Robust implementation of finite automata by recurrent RBF networks. *Proceedings of the SOFSEM'2000 Twenty-Seventh Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 431–439, LNCS 1963, Berlin: Springer Verlag, 2000.
- [45] M. Šorel, J. Šíma: Robust RBF finite automata. *Neurocomputing*, **62**(Dec):93–110, 2004.
- [46] J. Wiedermann, J. Šíma, R. Neruda: An optimal in-situ disk sorting algorithm based on heapsort. Technical Report V-591, ICS AS CR, Prague, 1994, 17 pp.
- [47] J. Wiedermann, J. Šíma, R. Neruda: Massaging heapsort into an optimal disk sorting algorithm. *Proceedings of the SOFSEM'94 Winter Seminar*, pp. 117–120, Brno: ÚVT MU, 1994.

Citace autorových prací

[1] 26 citací (10 SCI¹):

1. V. Beiu, J.G. Taylor: Direct synthesis of neural networks. *Proceedings of the MicroNeuro'96 Fifth International Conference on Microelectronics for Neural Networks and Fuzzy Systems*, pp. 257–264, IEEE Press, 1996.
2. B. Hammer: A NP-hardness result for a sigmoidal 3-node neural network. *Osnabrücker Schriften zur Mathematik*, Preprint, no. 196, 1997. (SCI)
3. M. Schmitt: Proving hardness of neural network training problems. *Neural Networks*, **10**(8):1533–1534, 1997.
4. S.Y. Yan, J. Austin: Mathematical foundations of statistical parallelism. *Mathematical Modelling and Scientific Computing*, **8**, 1997.
5. R. Andonie: The psychological limits of neural computation. In *Dealing with Complexity: A Neural Networks Approach*, pp. 252–263, Berlin: Springer Verlag, 1998.
6. V. Beiu: Reduced complexity constructive learning algorithm. *Neural Network World*, **8**(1):1–38, 1998.
7. B. Hammer: Some complexity results for perceptron networks. *Proceedings of the ICANN'98 Eight International conference on Artificial Neural Networks*, pp. 639–644, Berlin: Springer-Verlag, 1998.
8. B. Hammer: Training a sigmoidal network is difficult. *Proceedings of the ESANN'98 Sixth European Symposium on Artificial Neural Networks*, pp. 255–260, Brussels: D-Facto Publications, 1998.

¹citace evidované v databázi *Science Citation Index*

9. D.R. Hush: Training a piecewise-linear sigmoidal node is hard. Technical Report EECE-98-001, Department of Electrical and Computer Engineering, University of New Mexico, 1998.
10. N.S.V. Rao: Vector space methods for sensor fusion problems. *Optical Engineering*, **37**(2):499–504, 1998. (SCI)
11. B. Hammer: Learning with recurrent neural networks. PhD Thesis, University of Osnabrück, 1999.
12. D.R. Hush: Training a sigmoidal node is hard. *Neural Computation*, **11**(5):1249–1260, 1999. (SCI)
13. N.S.V. Rao: Fusion methods in multiple sensor systems using feedforward sigmoid neural networks. *Intelligent Automation and Soft Computing*, **5**(1):21–30, 1999. (SCI)
14. N.S.V. Rao: Multiple sensor fusion under unknown distributions. *Journal of The Franklin Institute*, **336**(2):285–299, 1999. (SCI)
15. Yingyang Lu, Shenchu Xu, Boxi Wu, Zhenxiang Chen: Pattern grouping strategy makes BP algorithm less sensitive to learning rate. *Proceedings of the IJCNN'99 International Joint Conference on Neural Networks*, Volume: 3, pp. 1753–1756, Piscataway, NJ: IEEE, 1999.
16. P. Coulibaly, F. Anctil, B. Bobee: Daily reservoir inflow forecasting using artificial neural networks with stopped training approach. *Journal of Hydrology*, **230**(3-4):244–257, 2000. (SCI)
17. B. DasGupta, B. Hammer: On approximate learning by multi-layered feedforward circuits. *Proceedings of the ALT'2000 Eleventh International Conference on Algorithmic Learning Theory*, pp. 264–278, LNAI 1968, Berlin: Springer Verlag, 2000. (SCI)
18. A. Hadjiprocopis: Feed forward neural network entities. PhD Thesis, Department of Computer Science, City University, London, 2000.
19. B. Hammer: *Learning with Recurrent Neural Networks*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 254, Berlin: Springer Verlag, 2000. (SCI)
20. K. Anand, H. Cheung, A. Ginige: Face detection using the pseudo-hierarchical neural network. Technical Report CIT/12/2002, University of Western Sydney, 2002.
21. B. Hammer: Recurrent networks for structured data - a unifying approach and its properties. *Cognitive Systems Research*, **3**(2):145–165, 2002.
22. N.S.V. Rao: Multisensor fusion under unknown distributions: Finite-sample performance guarantees. *Multisensor Fusion*, pp. 1–39, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

23. D.O. Cajueiro, E.M. Hemerly: Direct adaptive control using feedforward neural networks. *Sba Controle & Automacao*, **14**(4):348–358, 2003.
24. B. Hammer, T. Villmann: Mathematical aspects of neural networks. *Proceedings of the ESANN'2003 European Symposium on Artificial Neural Networks*, pp. 59–72, Bruges: D-Side Publications, 2003.
25. B. DasGupta, B. Hammer: On approximate learning by multi-layered feedforward circuits, *Theoretical Computer Science*, **348**(1):95–127, 2005. (SCI)
26. D. Windisch: Loading deep networks is hard: The pyramidal case. *Neural Computation*, **17**(2):487–502, 2005. (SCI)

[2] 7 citací (4 SCI):

27. R.C. Carrasco, J. Oncina, M.L. Forcada: Efficient encodings of finite automata in discrete-time recurrent neural networks. *Proceedings of the ICANN'99 International Conference on Artificial Neural Networks*, Vol. 2, pp. 673–677, London: IEE, 1999.
28. R.C. Carrasco, M.L. Forcada, M.A. Valdés-Muñoz, R.P. Neco: Stable encoding of finite-state machines in discrete-time recurrent neural nets with sigmoid units. *Neural Computation*, **12**(9):2129–2174, 2000. (SCI)
29. R.C. Carrasco, M.L. Forcada: Simple strategies to encode tree automata in sigmoid recursive neural networks. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, **13**(2):148–156, 2001. (SCI)
30. M.L. Forcada, R.C. Carrasco: Finite-state computation in analog neural networks: Steps towards biologically plausible models? *Emergent computational models based on neuroscience: Towards Neuroscience-Inspired Computing*, pp. 480–493, LNAI 2036, Berlin: Springer Verlag, 2001. (SCI)
31. J.F. Kolen, S.C. Kremer: *A Field Guide to Dynamical Recurrent Networks*. New York: IEEE Press, 2001.
32. M.L. Forcada: Neural networks, automata, and formal models of computation. Manuscript, Universitat dAlacant, Spain, 2002.
33. M. Gori, A. Petrosino: Encoding nondeterministic fuzzy tree automata into recursive neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **15**(6):1435–1449, 2004. (SCI)

[3] 7 citací (3 SCI):

34. Gao Daqi, Liu Hua, Li Changwu: On variable sizes and sigmoid activation functions of multilayer perceptrons. *Proceedings of the IJCNN'2003 International Joint Conference on Neural Networks*, pp. 2017–2022, New York: IEEE, 2003.

35. B. Hammer, T. Villmann: Mathematical aspects of neural networks. *Proceedings of the ESANN'2003 European Symposium on Artificial Neural Networks*, pp. 59–72, Bruges: D-Side Publications, 2003.
36. M. Schmitt: Some dichotomy theorems for neural learning problems. *Journal of Machine Learning Research*, **5**(Aug):891–912, 2004. (SCI)
37. M. Gori, A. Sperduti: The loading problem for recursive neural networks. *Neural Networks*, **18**(8):1064–1079, 2005. (SCI)
38. C. Igel, B. Sendhoff: Synergies between evolutionary and neural computation. *Proceedings of the ESANN'2005 European Symposium on Artificial Neural Networks*, pp. 241–252, Bruges: D-Side Publications, 2005.
39. C. Igel, S. Wiegand, F. Friedrichs: Evolutionary optimization of neural systems: The use of self-adaptation. In M.G. de Bruin, D.H. Mache, J. Szabados (eds.): *Trends and Applications in Constructive Approximation*, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 151, pp. 103–123, Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.
40. D. Windisch: Loading deep networks is hard: The pyramidal case. *Neural Computation*, **17**(2):487–502, 2005. (SCI)

[5] 9 citací (1 SCI):

41. C.D. Neagu: Modular neuro-fuzzy networks: solution for explicit and implicit knowledge integration. *The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati*, Fascicle III, 52–59, 2000.
42. F.S. Osório: Hybrid systems. *SoftComputing Guidebook* — PRIS/NUS, National University of Singapore, 2001.
43. R. Grothmann: Multi-agent market modeling based on neural networks. PhD Thesis, Faculty of Economics, University of Bremen, Germany, 2002.
44. C.D. Neagu, A.O. Aptula, G. Gini: Neural and neuro-fuzzy models of toxic action of phenols. *Proceedings of the IS 2002 First International IEEE Symposium on Intelligent Systems, Methodology, Models, Applications in Emerging Technologies*, pp. 283–288, Piscataway, NJ: IEEE, 2002.
45. C.D. Neagu, N. Avouris, E. Kalapanidas, V. Palade: Neurosymbolic integration in a knowledge-based system for air quality prediction. *Applied Intelligence*, **17**(2):141–169, 2002. (SCI)
46. C.D. Neagu, V. Palade: Modular neuro-fuzzy networks used in explicit and implicit knowledge integration. *Proceedings of the FLAIRS'2002 Fifteenth International Conference of Florida Artificial Intelligence Society*, pp. 277–281, Menlo Park, CA: AAAI Press, 2002.
47. N. Kasabov: Decision support systems and expert systems. In M. Arbib (ed.): *The Handbook of Brain Study and Neural Networks*, pp. 316–320, Cambridge: MIT Press, 2003.

48. I. Hatzilygeroudis, J. Prentzas: Neuro-symbolic approaches for knowledge representation in expert systems. *International Journal of Hybrid Intelligent Systems*, **1**(3):111–126, 2004.
49. S. Zhang, O. Bodenreider: Investigating implicit knowledge in ontologies with application to the anatomical domain. *Proceedings of the PSB 2004 Ninth Pacific Symposium on Biocomputing*, pp. 250–261, Singapore: World Scientific, 2004.

[6] 2 citace (1 SCI):

50. P.A. Simen: Neural mechanisms for control in complex cognition. PhD Thesis, The University of Michigan, 2004.
51. G. Serpen: A heuristic and its mathematical analogue within artificial neural network adaptation context. *Neural Network World*, **15**(2):129–136, 2005. (SCI)

[8] 14 citací (4 SCI):

52. R. Waivio: On discrete N-layer heteroassociative memory models. *Proceedings of the ICONIP'02 Ninth International Conference on Neural Information Processing*, Vol. 1, pp. 60–64, Piscataway, NJ: IEEE, 2002.
53. R.V. Florian: Biologically inspired neural networks for the control of embodied agents. Technical Report Coneural-03-03, Center for Cognitive and Neural Studies, Cluj, Romania, 2003.
54. V. Beiu, M. Sulieman: Optimal Practical Perceptron Addition - Application to Single Electron Technolog. *Proceedings of the VLSI-04 International Conference on VLSI*, pp. 541–547, Las Vegas, NV: CSREA Press, 2004.
55. S.M. Best, P.T. Cox: Using artificial neural networks in the visual programming of autonomous robots. Technical Report CS-2004-07, Dalhousie University, Canada, 2004.
56. L. Franco: A Measure for the complexity of Boolean functions related to their implemetation in neural networks. Submitted for publication, 2004.
57. R. Lopez-Ruiz, Y. Moreno, S. Boccaletti, D.-U. Hwang, A.F. Pacheco: Awakening and sleeping a complex network. Nonlinear Sciences archive, <http://arxiv.org/abs/nlin.A0/0406053>, 2004.
58. S. Dominich: World wide web retrieval: an advanced course. Department of Computer Science, University of Veszprém, Hungary, 2005.
59. V. Eliashberg: The ULC project. *IJCNN 2005 Workshop on Achieving Functional Integration of Diverse Neural Model*, 2005.
60. C. Igel, S. Wiegand, F. Friedrichs: Evolutionary optimization of neural systems: The use of self-adaptation. In M.G. de Bruin, D.H. Mache, J. Szabados (eds.): *Trends and Applications in Constructive Approximation*, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 151, pp. 103–123, Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.

- 61. H. Jacobsson: Rule extraction from recurrent neural networks: A taxonomy and review. *Neural Computation*, **17**(6):1223–1263, 2005. (SCI)
- 62. S. Jo, J. Yin, Z.-H. Mao: Random neural networks with state-dependent firing neurons. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **16**(4):980–983, 2005. (SCI)
- 63. W. Maass, H. Markram: Theory of the computational function of microcircuit dynamics. To appear in S. Grillner, A.M. Graybiel (eds): *The Interface between neurons and global brain function*, Dahlem Workshop Report 93, MIT Press, 2005.
- 64. S. Roy, V. Beiu: Majority multiplexing-economical redundant fault-tolerant designs for nanoarchitectures. *IEEE Transactions Nanotechnology*, **4**(4):441–451, 2005. (SCI)
- 65. Q.C. Zhao: A remark on “Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications” by C. Farrow, J. Heidel, J. Maloney, and J. Rogers. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **16**(6):1715–1716, 2005. (SCI)

[9] 4 citace (2 SCI):

- 66. P. Orponen: An overview of the computational power of recurrent neural networks. *Proceedings of the Ninth Finnish AI Conference STeP 2000*, AI of Tomorrow, Vol. 3, pp. 89–96, Vaasa: Finnish AI Society, 2000.
- 67. P.H.S. Torr: Gestalt segmentation using semi definite programming. Manuscript, Department of Computing, Oxford Brookes University, 2002.
- 68. C. Molter, H. Bersini: Fascinating rhythms by chaotic Hopfield networks. *Proceedings of the ECAL 2003 Seventh European Conference on Advances in Artificial Life*, pp. 191–198, LNAI 2801, Berlin: Springer Verlag, 2003. (SCI)
- 69. C. Bousono-Calznon, S. Salcedo-Sanz: A discrete-time quantized-state Hopfield neural network. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **42**(4):345–367, 2004. (SCI)

[10] 17 citací (8 SCI):

- 70. J. Wiedermann: On the computational and desriptional complexity of finite neural networks. In *Book of Abstracts of the WCCL96 Workshop on Computability, Complexity and Logic*, pp. 17–19, Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greifswald, 1996.
- 71. J. Wiedermann: Towards computational models of the brain: Getting started. *Neural Network World*, **7**(1):89–120, 1997.
- 72. J. Wiedermann: Towards machines that can think. *Proceedings of the SOF-SEM'97 Twenty-Fourth Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 122–141, LNCS 1338, Berlin: Springer Verlag, 1997.

73. D. Kustrin, J. Austin: Parallel connectionist automata. Manuscript, Department of Computer Science, University of York, 1999.
74. J. Wiedermann: Computational power of neuroidal nets. *Proceedings of the SOFSEM'99 Twenty-Sixth Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 471–479, LNCS 1725, Berlin: Springer Verlag, 1999. (SCI)
75. J. Wiedermann: The computational limits to the cognitive power of the neuroidal tabula rasa. *Proceedings of the ALT'99 Tenth International Conference on Algorithmic Learning Theory*, pp. 63–76, LNAI 1720, Berlin: Springer Verlag, 1999. (SCI)
76. R.C. Carrasco, M.L. Forcada, M.A. Valdés-Muñoz, R.P. Ñeco: Stable encoding of finite-state machines in discrete-time recurrent neural nets with sigmoid units. *Neural Computation*, **12**(9):2129–2174, 2000. (SCI)
77. P. Orponen: An overview of the computational power of recurrent neural networks. *Proceedings of the Ninth Finnish AI Conference STeP 2000*, AI of Tomorrow, Vol. 3, pp. 89–96, Vaasa: Finnish AI Society, 2000.
78. M.L. Forcada, R.C. Carrasco: Finite-state computation in analog neural networks: Steps towards biologically plausible models? *Emergent computational models based on neuroscience: Towards Neuroscience-Inspired Computing*, pp. 480–493, LNAI 2036, Berlin: Springer Verlag, 2001. (SCI)
79. J.F. Kolen, S.C. Kremer: *A Field Guide to Dynamical Recurrent Networks*. New York: IEEE Press, 2001.
80. J. Moriya, T. Nishino: Relationships between the computational capabilities of simple recurrent networks and finite automata. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **E84-A**(5):1184–1194, 2001. (SCI)
81. J. van Leeuwen, J. Wiedermann: Beyond the Turing limits: Evolving interactive systems. *Proceedings of the SOFSEM'2001 Twenty-Eight Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 90–109, LNCS 2234, Berlin: Springer Verlag, 2001.
82. J. Wiedermann: On the super-Turing computational power of non-uniform families of neuromata. *Neural Network World*, **12**(5):509–515, 2002.
83. J. Wiedermann, J. van Leeuwen: The emergent computational potential of evolving artificial living systems. *AI Communications*, **15**(4):205–215, 2002. (SCI)
84. I. Gabrijel, A. Dobnikar: On-line identification and reconstruction of finite automata with generalized recurrent neural networks. *Neural Networks*, **16**(1):101–120, 2003. (SCI)
85. H.T. Siegelmann: Neural automata and analog computational complexity. In M. Arbib (ed.): *The Handbook of Brain Study and Neural Networks*, pp. 729–732, Cambridge: MIT Press, 2003.

86. J. Wiedermann: The computational limits to the cognitive power of the neuroidal tabula rasa. *Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*, **15**(3):267–279, 2003. (SCI)

[12] 3 citace:

87. M. Šnorek, M. Jiřina: *Neuronové sítě a neuropočítače*. ČVUT, Praha, 1996.
88. R. Bělohávek: Backpropagation for interval patterns. *Neural Network World*, **7**(3):335–346, 1997.
89. M. Jiřina: Vybrané partie z neuronových sítí. Kapitola v monografii V. Mařík, O. Štěpánková, J. Lažanský (Eds.): *Umělá inteligence*, Vol. 4, pp. 204–253, Praha: Academia, 2003.

[13] 3 citace:

90. M. Šnorek, M. Jiřina: *Neuronové sítě a neuropočítače*. ČVUT, Praha, 1996.
91. R. Bělohávek: Backpropagation for interval patterns. *Neural Network World*, **7**(3):335–346, 1997.
92. S. Kollias: Review of artificial intelligence and neural network techniques for mapping features to symbols. Report of Project Principled Hybrid Systems: Theory and Applications, Institute of Communications and Computer Systems, National Technical University, Ahtens, 1998.

[15] 13 citací (7 SCI):

93. M.C.P de Souto, K.S. Guimaraes, T.B. Ludermir: Learning and generalization in pyramidal architectures. *Proceedings of SBAI'95 Second Brazilian Symposium on Intelligent Automation*, pp. 225–230, 1995.
94. M.C.P de Souto, K.S. Guimaraes, T.B. Ludermir: On the intractibility of loading pyramidal architectures. *Proceedings of the IEE Fourth International Conference on Artificial Neural Networks*, pp. 189–194, London: IEE, 1995.
95. M. Schmitt: On methods to keep learning away from intractability. *Proceedings of the ICANN'95 Fifth International Conference on Artificial Neural Networks*, Volume 1, pp. 211–216, Paris: EC2 & Cie., 1995.
96. Y. Takahashi: A mathematical solution to a network designing problem. *Journal of Computational Biology*, **3**(1):97–141, 1996. (SCI)
97. T.Y. Kwok, D.Y. Yeung: Constructive algorithms for structure learning in feed-forward neural networks for regression problems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **8**(3):630–645, 1997. (SCI)
98. Y. Takahashi: A mathematical solution to a network designing problem. *Neurocomputing*, **15**(2):107–170, 1997. (SCI)

99. M.C.P de Souto, W.R. de Oliveira: The loading problem for pyramidal neural networks. *Electronic Journal on Mathematics of Computation*, <http://gmc.ucpel.tche.br/ejmc/>, 1999.
100. G. Andrejková: Neurónové siete, aproximácia funkcií a predikcia javov. Habilitačná práca, Přírodovědná fakulta Univerzity P.J. Šafárika, Košice, 2000.
101. A. Hadjiprocopis: Feed forward neural network entities. PhD Thesis, Department of Computer Science, City University, London, 2000.
102. Y. Takahashi: A mathematical solution to a network construction problem. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, **47**(2):166–184, 2000. (SCI)
103. N. García-Pedrajas, C. Hervás-Martínez, J. Muñoz-Peréz: Multi-objective cooperative coevolution of artificial neural networks (multi-objective cooperative networks). *Neural Networks*, **15**(10):1259–1278, 2002. (SCI)
104. P.E. Utgoff, D.J. Stracuzzi: Many-layered learning, *Neural Computation*, **14**(10):2497–2529, 2002. (SCI)
105. D. Windisch: Loading deep networks is hard: The pyramidal case. *Neural Computation*, **17**(2):487–502, 2005. (SCI)

[17] 5 citací (1 SCI):

106. J. Wiedermann: On the computational and descriptonal complexity of finite neural networks. In *Book of Abstracts of the WCCL96 Workshop on Computability, Complexity and Logic*, pp. 17–19, Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greifswald, 1996.
107. J. Wiedermann: Towards computational models of the brain: Getting started. *Neural Network World*, **7**(1):89–120, 1997.
108. G. Andrejková: Neurónové siete, aproximácia funkcií a predikcia javov. Habilitačná práca, Přírodovědná fakulta Univerzity P.J. Šafárika, Košice, 2000.
109. P. Orponen: An overview of the computational power of recurrent neural networks. *Proceedings of the Ninth Finnish AI Conference STeP 2000*, AI of Tomorrow, Vol. 3, pp. 89–96, Vaasa: Finnish AI Society, 2000.
110. W.R. de Oliveira, M.C.P. de Souto, T.B. Ludermir: Turing’s analysis of computational and artificial neural networks. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **13**(2-4):85–98, 2002. (SCI)

[18] 18 citací (9 SCI):

111. C.A. Holzmann, A. Ehijo, C.A. Perez: Methodology for a medical expert system on fuzzy analog ganglionar lattices. Non-approximate reasoning with multiple antecedents of different relative importance and limited uncertainty. *Medical Progress Through Technology*, **21**(3):147-158, 1995-96. (SCI)

112. C.A. Holzmann, M. SanMartin: Medical expert system on fuzzy analog ganglionar lattices: Explication and prospection based on sensitivity. *Medical Progress Through Technology*, **21**(4):195-203, 1996-97. (SCI)
113. M.J. Healy, T.P. Caudell: Acquiring rule sets as a product of learning in a logical neural architecture. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **8**(3):461-464, 1997. (SCI)
114. P.S.Y. Wu, Y.G. Xiong: A learning mechanism for parts recognition in intelligent assembly system. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **13**(6):413-418, 1997. (SCI)
115. S. Kollias: Review of artificial intelligence and neural network techniques for mapping features to symbols. Report of Project Principled Hybrid Systems: Theory and Applications, Institute of Communications and Computer Systems, National Technical University, Ahtens, 1998.
116. N.V.S. Reddy, P. Nagabhushan: A connectionist expert system model for conflict resolution in unconstrained handwritten numeral recognition. *Pattern Recognition Letters*, **19**(2):161-169, 1998. (SCI)
117. W. Runxiao, Q. Xiansheng, L. Qi, Z. Hui: Study and application of CNC system fault diagnosis based artificial neural networks and expert system. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, **9**(6):691-695, 1998.
118. R.W. Brause: Do neural networks revolutionize our prediction abilities? *Zentralblatt für Chirurgie*, **124**(8):692-698, 1999. (SCI)
119. W. Ebenhöh, T. Klenke, J. Kropp: Data integration and qualitative dynamics in the Wadden sea. Auszüge aus dem Projektantrag, Institut für Chemie und Biologie des Meeres, Oldenburg, 1999.
120. M.J. Healy: A topological semantics for rule extraction with neural networks. *Connection Science*, **11**(1):91-113, 1999. (SCI)
121. G. Stamou, D. Vogiatzis, S. Strove: Bridging the gap between subsymbolic and symbolic techniques: A pragmatic approach. In N.E. Mastorakis (ed): *Computational Intelligence and Applications*, pp. 49-54, Athens: World Scientific and Engineering Society Press, 1999.
122. Ch. Chou, J.C. Teng: A fuzzy logic controller for traffic junction signals, *Information Sciences*, **143**(1-4):73-97, 2002. (SCI)
123. G. Kalra, Y. Peng, M. Guo, L. Augsburg: A hybrid intelligent system for formulation of BCS Class II drugs in hard gelatin capsules. *Proceedings of the ICONIP'02 Ninth International Conference on Neural Information Processing*, Vol. 4, pp. 1987-1991, Piscataway, NJ: IEEE, 2002.

- 124. R. Wall, P. Cunningham, P. Walsh: Explaining predictions from a neural network ensemble one at a time. *Proceedings of the PKDD'2002 Sixth European Conference Principles of Data Mining and Knowledge Discovery*, pp. 449–460, LNAI 2431, Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- 125. R. Wall, P. Cunningham, P. Walsh: Explaining the output of ensembles in medical decision support on a case by case basis. *Artificial Intelligence in Medicine*, **28**(2):191–206, 2003. (SCI)
- 126. J.W. Gregory, M. Li, Q. Qi: A knowledge managements solution to the difficulties of dementia diagnosis. Manuscript, Faculty of Computer Science, Dalhousie University, Canada, 2004.
- 127. I. Hatzilygeroudis, J. Prentzas: Neuro-symbolic approaches for knowledge representation in expert systems. *International Journal of Hybrid Intelligent Systems*, **1**(3):111–126, 2004.
- 128. M.J. Healy, T.P. Caudell: Neural networks, knowledge and cognition: A mathematical semantic model based upon category theory. Technical Report EECE-TR-04-020, School of Engineering, University of New Mexico, 2004.

[21] 1 citace:

- 129. T. Chyssler, S. Nadjm-Tehrani, S. Burschka, K. Burbeck: Alarm reduction and correlation in defence of IP networks. *Proceedings of the WETICE'04 Thirteen International Workshops on Enabling Technologies: Infrastructures for Collaborative Enterprises*, pp. 229–234, Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society, 2004.

[23] 2 citace (1 SCI):

- 130. T.C. Biedl, E. Čenek, T.M. Chan, E.D. Demaine, M.L. Demaine, R. Fleischer, M.-W. Wang: Balanced k-colorings. *Proceedings of the MFCS'2000 Twenty-Fifth International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pp. 202–211, LNCS 1893, Berlin: Springer Verlag, 2000.
- 131. T.C. Biedl, E. Čenek, T.M. Chan, E.D. Demaine, M.L. Demaine, R. Fleischer, M.-W. Wang: Balanced k-colorings. *Discrete Mathematics*, **254**(1-3):19–32, 2002. (SCI)

[24] 2 citace:

- 132. F.S. Osório: Hybrid systems. *SoftComputing Guidebook* — PRIS/NUS, National University of Singapore, 2001.
- 133. R. Vimieiro, L.E. Zárate, J.P.D. Silva, E.M.D. Pereira, A.S.C. Diniz: Rule extraction from trained neural networks via formal concept analysis. *Proceedings of the ASC 2004 Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing*, pp. 142–146, Calgary, Canada: ACTA Press, 2004.

[26] 1 citace (1 SCI):

134. P.A. Estevéz, Y. Okabe: On the computational power of max-min propagation neural networks. *Neural Processing Letters*, **19**(1):11–23, 2004. (SCI)

[31] 1 citace (1 SCI):

135. R. Gan, D. Yang: Case-based decision support system with artificial neural network. *Computers & Industrial Engineering*, **27**(1-4):437–440, 1994. (SCI)

[32] 1 citace:

136. M. Šnorek, M. Jiřina: *Neuronové sítě a neuropočítače*. ČVUT, Praha, 1996.

[35] 1 citace (1 SCI):

137. R.W. Brause: Do neural networks revolutionize our prediction abilities? *Zentralblatt für Chirurgie*, **124**(8):692–698, 1999. (SCI)

[36] 17 citací (4 SCI):

138. G. Andrejková, M. Mikulová: Kolmogorov's theorem and neural networks. *Neural Network World*, **8**(5):501–510, 1998.
139. G. Andrejková, M. Mikulová: Kolmogorov's theorem and neural networks. *Proceedings of the SCANN'98 Second Slovak Conference on Artificial Neural Networks*, pp. 46–51, Trnava: VÚJE, 1998.
140. F. Hakl, M. Holeňa: *Úvod do teorie neuronových sítí*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1998.
141. M. Novák, O. Kufudaki, P. Moos, P. Musílek, E. Pelikán, V. Šebesta: *Umělé neuronové sítě. Teorie a aplikace*. Praha: C.H. Beck, 1998.
142. P. Klán, J. Mindl, A. Štědrý, E. Rubešová: *Chemická informatika. Úvod do používání internetu*. Pardubice: FCHT Univerzita Pardubice, 1999.
143. G. Andrejková: Neurónové siete, aproximácia funkcií a predikcia javov. Habilitačná práca, Přírodovědná fakulta Univerzity P.J. Šafárika, Košice, 2000.
144. P. Hájek: Soft Computing: nové informatické paradigma nebo módní slogan? *Vesmír*, **79**(12):683–685, 2000.
145. V. Kvasnička, J. Pospíchal: Metafory živej prírody v informatike. Kapitola v monografii L. Benušková, V. Kvasnička, J. Pospíchal: *Hľadanie spoločného jazyka v kognitívnych vedách*, pp. 121–144, Bratislava: IRIS, 2000.
146. J. Pospíchal: Neurónové siete. Kapitola v monografii V. Kvasnička, J. Pospíchal, P. Tiňo: *Evolučné algoritmy*, pp. 155–182, Bratislava: Vydavateľstvo Slovenské Technické Univerzity, 2000.

147. I.M. Havel: Přírozené a umělé myšlení jako filozofický problém. *Umělá inteligence* Vol. 3, pp. 17–75, Praha: Academia, 2001.
148. M. Neruda, R. Neruda: To contemplate quantitative and qualitative water features by neural networks method. *Rostlinná výroba*, **48**(7):322–326, 2002. (SCI)
149. P. Berka: *Dobývání znalostí z databází*. Praha: Academia, 2003.
150. J. Gemela: Learning Bayesian networks using various datasources and applications to financial analysis. *Soft Computing*, **7**(5):297–303, 2003. (SCI)
151. M. Jiřina: Vybrané partie z neuronových sítí. Kapitola v monografii V. Mařík, O. Štěpánková, J. Lažanský (Eds.): *Umělá inteligence*, Vol. 4, pp. 204–253, Praha: Academia, 2003.
152. L. Hvizdoš, M. Levický M.: Neuronove siete pre komprimáciu zvukových dat. *Proceedings of the ITAT'2004 Workshop on Information Technologies - Applications and Theory*, University of P.J. Šafárik, 2004.
153. T. Ondráček: Constructive gradient neural network. *Neural Network World*, **15**(6):553–566, 2005. (SCI)
154. P. Svoboda, V. Tatarinov, J. Faber: Detection and early prediction of hypnagogium based on EEG analysis. *Neural Network World*, **15**(2):165–174, 2005. (SCI)
155. M. Holeňa: *Statistické aspekty dobývání znalostí z dat*. Praha: Karolinum, 2006.

[37] 7 citací (2 SCI):

156. P. Orponen: The computational power of continuous time asymmetric neural networks. Manuscript, Department of Computer Science and Engineering, Helsinki University of Technology, 1999.
157. P. Orponen: An overview of the computational power of recurrent neural networks. *Proceedings of the Ninth Finnish AI Conference STeP 2000*, AI of Tomorrow, Vol. 3, pp. 89–96, Vaasa: Finnish AI Society, 2000.
158. A. Ben-Hur, H.T. Siegelmann: Computation in gene networks. *Proceedings of the MCU 2001 Third International Conference on Machines, Computations, and Universality*, pp. 11–24, LNCS 2055, Berlin: Springer Verlag, 2001.
159. A. Ben-Hur, H.T. Siegelmann, S. Fishman: A theory of complexity for continuous time dynamics. *Journal of Complexity*, **18**(1):51-86, 2002. (SCI)
160. A. Ben-Hur, H.T. Siegelmann, S. Fishman: The complexity of computing continuous time devices. *Limitations and Future Trends in Neural Computation*, NATO Science Series: Computer & Systems Sciences, Vol. 186, pp. 23–44, Amsterdam: IOS Press, 2003.

161. R.V. Florian: Biologically inspired neural networks for the control of embodied agents. Technical Report Coneural-03-03, Center for Cognitive and Neural Studies, Cluj, Romania, 2003.

162. A. Ben-Hur, H.T. Siegelmann: Computation in gene networks. *Chaos*, **14**(1):145–151, 2004. (SCI)

[38] 3 citace (2 SCI):

163. M.L. Campagnolo: Computational complexity of real valued recursive functions and analog circuits. PhD Thesis, Technical University of Lisbon, 2001.

164. M. Gori, K. Meer: A step towards a complexity theory for dynamical systems. *Mathematical Logic Quarterly*, **48**(S1):45–58, 2002. (SCI)

165. J. Durand-Lose: Abstract geometrical computation: Turing-computing ability and undecidability. *Proceedings of the CiE 2005 Conference on Computability in Europe*, pp. 106–116, LNCS 3526, Berlin: Springer Verlag, 2005. (SCI)

[39] 3 citace (1 SCI):

166. M.L. Campagnolo: Computational complexity of real valued recursive functions and analog circuits. PhD Thesis, Technical University of Lisbon, 2001.

167. M. Gori, K. Meer: A step towards a complexity theory for dynamical systems. *Mathematical Logic Quarterly*, **48**(S1):45–58, 2002. (SCI)

168. M. Schmitt: Computing time lower bounds for recurrent sigmoidal neural networks. In T.G. Dietterich, S. Becker, Z. Ghahramani (eds.): *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS'2001)*, Vol. 14, pp. 503–510, Cambridge, MA: MIT Press, 2002.

[40] 1 citace:

169. P. Orponen: The computational power of continuous time asymmetric neural networks. Manuscript, Department of Computer Science and Engineering, Helsinki University of Technology, 1999.

[42] 2 citace (1 SCI):

170. A. Mouraud, D. Puzenat, H. Paugam-Moisy: DAMNED: A distributed and multithreaded neural event-driven simulation framework. Computing Research Repository, <http://arxiv.org/abs/cs.NE/0512018>, 2005.

171. S. Chevallier, P. Tarroux, H. Paugam-Moisy: Saliency extraction with a distributed spiking neural network. To appear in *Proceedings of the ESANN'2006 Fourteenth European Symposium on Artificial Neural Networks*, Brussels: D-Facto Publications, 2006.

[43] 3 citace:

172. J. Wiedermann: On the computational and descriptonal complexity of finite neural networks. In *Book of Abstracts of the WCCL96 Workshop on Computability, Complexity and Logic*, pp. 17–19, Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greifswald, 1996.
173. J. Wiedermann: Towards computational models of the brain: Getting started. *Neural Network World*, **7**(1):89–120, 1997.
174. J. Wiedermann: Towards machines that can think. *Proceedings of the SOF-SEM'97 Twenty-Fourth Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 122–141, LNCS 1338, Berlin: Springer Verlag, 1997.

Literatura

- [48] E. Aarts, J. Korst: *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [49] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Reading: Addison–Wesley, 1974.
- [50] D. Angluin: Computational learning theory: Survey and selected bibliography. *Proceedings of the STOC'92 Twenty-Fourth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 351–369, New York: ACM Press, 1992.
- [51] M. Anthony: *Discrete Mathematics of Neural Networks: Selected Topics*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [52] M. Anthony, N. Biggs: *Computational Learning Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [53] J.L. Balcázar, J. Díaz, J. Gabarró: *Structural Complexity I* (2nd ed.). Berlin: Springer-Verlag, 1995.
- [54] J.L. Balcázar, R. Gavaldà, H.T. Siegelmann: Computational power of neural networks: A characterization in terms of Kolmogorov complexity. *IEEE Transactions of Information Theory*, **43**(4):1175–1183, 1997.
- [55] F. Barahona: On the computational complexity of Ising spin glass models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **15**(10):3241–3253, 1982.
- [56] E.B. Baum: Book reviews. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **2**(1):181–182, 1991.
- [57] E.B. Baum, D. Haussler: What size net gives valid generalization? *Neural Computation*, **1**(1):151–160, 1989.

- [58] A. Ben-Hur, H.T. Siegelmann, S. Fishman: A theory of complexity for continuous time systems. *Journal of Complexity*, **18**(1):51–86, 2002.
- [59] A.L. Blum, R.L. Rivest: Training a 3-node neural network is NP-complete. *Neural Networks*, **5**(1):117–127, 1992.
- [60] A. Blumer, A. Ehrenfeucht, D. Haussler, M.K. Warmuth: Learnability and the Vapnik-Chervonenkis dimension. *Journal of the ACM*, **36**(4):929–965, 1989.
- [61] D.P. Bovet, P. Crescenzi: *Introduction to the Theory of Complexity*. Hemel Hempstead, UK: Prentice Hall International, 1994.
- [62] M.A. Cohen, S. Grossberg: Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **13**(5):815–826, 1983.
- [63] B. DasGupta, G. Schmitzer: Analog versus discrete neural networks. *Neural Computation*, **8**(4):805–818, 1996.
- [64] B. DasGupta, H.T. Siegelmann, E.D. Sontag: On the intractability of loading neural networks. In V. Roychowdhury, K.-Y. Siu, A. Orlicsky (eds), *Theoretical Advances in Neural Computation and Learning*, pp. 357–389, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [65] M.C.P de Souto, W.R. de Oliveira: The loading problem for pyramidal neural networks. *Electronic Journal on Mathematics of Computation*, <http://gmc.ucpel.tche.br/ejmc>, 1999.
- [66] A. Ehrenfeucht, D. Haussler, M. Kearns, L.G. Valiant: A general lower bound on the number of examples needed for learning. *Information and Computation*, **82**(3):247–261, 1989.
- [67] S.E. Fahlman, C. Lebiere: The cascade-correlation learning architecture. In D. S. Touretzky (ed): *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS'89)*, Vol. 2, pp. 524–532, San Mateo: Morgan Kaufmann, 1990.
- [68] M. Frean: The upstart algorithm: A method for constructing and training feedforward neural networks. *Neural Computation*, **2**(2):198–209, 1990.
- [69] S.I. Gallant: Connectionist expert systems. *Communications of the ACM*, **31**(2):152–169, 1988.
- [70] S.I. Gallant: *Neural Network Learning and Expert Systems*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1993.

- [71] E. Goles, S. Martínez: Exponential transient classes of symmetric neural networks for synchronous and sequential updating. *Complex Systems*, **3**(6):589–597, 1989.
- [72] M. Gori, K. Meer: A step towards a complexity theory for analog systems. *Mathematical Logic Quarterly*, **48**(1): 45–58, 2002.
- [73] A. Hajnal, W. Maass, P. Pudlák, M. Szegedy, G. Turán: Threshold circuits of bounded depth. *Journal of Computer and System Sciences*, **46**(2), 129–154, 1993.
- [74] B. Hammer: Training a sigmoidal network is difficult. *Proceedings of the ESANN'98 Eight European Symposium on Artificial Neural Networks*, pp. 255–260, Brussels: D-Facto, 1998.
- [75] S. Haykin: *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 1999.
- [76] J. Hertz, A. Krogh, R.G. Palmer: *Introduction to the Theory of Neural Computation*. Lecture Notes, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, vol. I, California: Addison–Wesley, 1991.
- [77] K.-U. Höffgen: Computational limitations on training sigmoid neural networks. *Information Processing Letters*, **46**(6):269–274, 1993.
- [78] K.-U. Höffgen, H.-U. Simon, K.S. Van Horn: Robust trainability of single neurons. *Journal of Computer and System Sciences*, **50**(1):114–125, 1995.
- [79] J.J. Hopfield: Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **79**:2554–2558, 1982.
- [80] J.J. Hopfield: Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **81**:3088–3092, 1984.
- [81] J.J. Hopfield, D.W. Tank: „Neural“ computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics*, **52**(3):141–152, 1985.
- [82] B.G. Horne, D.R. Hush: On the node complexity of neural networks. *Neural Networks*, **7**(9):1413–1426, 1994.
- [83] B.G. Horne, D.R. Hush: Bounds on the complexity of recurrent neural network implementations of finite state machines. *Neural Networks*, **9**(2):243–252, 1996.

- [84] P. Indyk: Optimal simulation of automata by neural nets. *Proceedings of the STACS'95 Twelve Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pp. 337–348, LNCS 900, Berlin: Springer-Verlag, 1995.
- [85] J.S. Judd: *Neural Network Design and the Complexity of Learning*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1990.
- [86] N. Karmarkar: A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, **4**(4):373–395, 1984.
- [87] M. Karpinski, A.J. MacIntyre: Polynomial bounds for VC dimension of sigmoidal neural networks. *Proceedings of the STOC'95 Twenty-Seventh Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 200–208, Las Vegas: ACM Press, 1995.
- [88] M. Kearns, U. Vazirani: *Introduction to Computational Learning Theory*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1994.
- [89] S.C. Kleene: Representation of events in nerve nets and finite automata. In C. E. Shannon, J. McCarthy (eds), *Automata Studies*, pp. 3–41, Annals of Mathematics Studies, Vol. 34, Princeton: Princeton University Press, 1956.
- [90] P. Koiran: Dynamics of discrete time, continuous state Hopfield networks. *Neural Computation*, **6**(3):459–468, 1994.
- [91] P. Komlós, R. Patury: Convergence results in an associative memory model. *Neural Networks*, **1**(3):239–250, 1988.
- [92] J.-H. Lin, J.S. Vitter: Complexity results on learning by neural nets. *Machine Learning*, **6**(3):211–230, 1991.
- [93] W. Maass: Current research about learning on neural nets. In V. Roychowdhury, K.-Y. Siu, A. Orlitsky (eds), *Theoretical Advances in Neural Computation and Learning*, pp. 295–336, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [94] W. Maass: Neural nets with superlinear VC-dimension. *Neural Computation*, **6**(5):877–884, 1994.
- [95] W. Maass, P. Orponen: On the effect of analog noise in discrete-time analog computations. *Neural Computation*, **10**(5):1071–1095, 1998.
- [96] W. Maass, G. Schnitger, E.D. Sontag: On the computational power of sigmoid versus Boolean threshold circuits. *Proceedings of the FOCS'91 Thirty-Second Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 767–776, New York: IEEE Press, 1991.

- [97] W. Maass, E.D. Sontag: Analog neural nets with Gaussian or other common noise distribution cannot recognize arbitrary regular languages. *Neural Computation*, **11**(3):771–782, 1999.
- [98] M. Marchand, M. Golea, P. Ruján: A convergence theorem for sequential learning in two-layer perceptrons. *Europhysics Letters*, **11**(6):487–492, 1990.
- [99] S. Mechlová: Aplikace neuronových sítí. Diplomová práce, Katedra řídicí techniky, FEL ČVUT, Praha, 1994.
- [100] P. Orponen: Computational complexity of neural networks: A survey. *Nordic Journal of Computing*, **1**(1):94–110, 1994.
- [101] P. Orponen: The computational power of discrete Hopfield nets with hidden units. *Neural Computation*, **8**(2):403–415, 1996.
- [102] P. Orponen: The computational power of continuous time neural networks. *Proceedings of the SOFSEM'97 Twenty-Seventh Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pp. 86–103, LNCS 1338, Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [103] C.H. Papadimitriou: *Computational Complexity*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
- [104] I. Parberry: *Circuit Complexity and Neural Networks*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1994.
- [105] L. Pitt, L.G. Valiant: Computational limitations on learning from examples. *Journal of the ACM*, **35**(4), 965–984, 1988.
- [106] S. Poljak, M. Sůra: On periodical behaviour in societies with symmetric influences. *Combinatorica*, **3**(1):119–121, 1983.
- [107] R.R. Rojas: *Neural Networks: A Systematic Introduction*. Berlin: Springer Verlag, 1996.
- [108] V.P. Roychowdhury, K.-Y. Siu, T. Kailath: Classification of linearly non-separable patterns by linear threshold elements. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **6**(2):318–331, 1995.
- [109] V.P. Roychowdhury, K.-Y. Siu, A. Orlitsky: *Theoretical Advances in Neural Computation and Learning*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [110] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, R.J. Williams: Learning internal representations by error propagation. In D. E. Rumelhart, J. L. McClelland (eds), *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*, Vol. I, pp. 318–362, Cambridge, MA: The MIT Press, 1986.

- [111] H.T. Siegelmann: *Neural Networks and Analog Computation: Beyond the Turing Limit*. Boston: Birkhäuser, 1999.
- [112] H.T. Siegelmann, E.D. Sontag: Analog computation via neural networks. *Theoretical Computer Science*, **131**(2):331–360, 1994.
- [113] H.T. Siegelmann, E.D. Sontag: Computational power of neural networks. *Journal of Computer System Science*, **50**(1):132–150, 1995.
- [114] K.-Y. Siu, V.P. Roychowdhury, T. Kailath: Depth-size tradeoffs for neural computation. *IEEE Transactions on Computers*, **40**(12):1402–1412, 1991.
- [115] K.-Y. Siu, V.P. Roychowdhury, T. Kailath: *Discrete Neural Computation: A Theoretical Foundation*, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.
- [116] E.D. Sontag: Feedforward nets for interpolation and classification. *Journal of Computer and System Sciences*, **45**(1):20–48, 1992.
- [117] L.G. Valiant: A theory of the learnable. *Communication of the ACM*, **27**(11):1134–1142, 1984.
- [118] V.N. Vapnik, A.Y. Chervonenkis: On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Theory of Probability and its Application*, **16**(2):264–280, 1971.
- [119] M. Vidyasagar: *A Theory of Learning and Generalization (With Applications to Neural Networks and Control Systems)*. London: Springer-Verlag, 1997.
- [120] I. Wegener: *The Complexity of Boolean Functions*. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- [121] R.S. Wengocur, R.M. Dudley: Some special Vapnik-Chervonenkis classes. *Discrete Mathematics*, **33**(3):313–318, 1981.
- [122] J. Wiedermann: Complexity issues in discrete neurocomputing. *Neural Network World*, **4**(1):99–119, 1994.
- [123] H. Wiklicky: The neural network loading problem is undecidable. *Proceedings of the EuroCOLT'93 First European Conference on Computational Learning Theory*, pp. 183–192, Oxford: Clarendon Press, 1994.
- [124] D. Windisch: Loading deep networks is hard: The pyramidal case. *Neural Computation*, **17**(2):487–502, 2005.

Summary

This thesis is devoted to computational theory of neural networks with a special focus on analog models possibly operating in continuous time. It is composed of 10 author's papers published since 1996 including the commentary that summarizes the results on the subject within the context of existing literature in this field. In the introductory part, the basic principles of neural nets are illustrated by implicit knowledge representation in expert systems. In addition, an original architecture of a neural expert system based on analog networks allowing gradient-based learning (backpropagation) was proposed, which operates with incomplete information by using interval neuron function and provides simple explanation of inference.

Furthermore, the computational power of various neural network models was analyzed by comparing them with more traditional computational means, and several fundamental results were achieved. In particular, an optimal-size neural automaton was constructed for a regular language described by a regular expression. A new sub-regular class of so-called Hopfield languages accepted by symmetric networks was completely characterized. The tight converse to famous Hopfield's convergence theorem was proven which means that not only do all symmetric networks converge, but also all convergent computations can be implemented very efficiently in symmetric networks.

These results were generalized to analog neural models by introducing a general stable analog simulation of binary networks. Also an analog symmetric network was constructed whose convergence time exceeds the convergence time of any binary Hopfield net of the same descriptive complexity which suggests that analog models with limited-precision parameters may gain efficiency over binary ones. Moreover, the important minimum energy problem was shown to be NP-hard for analog Hopfield nets, which is a model actually used in practical optimization applications. Finally, a fundamental result in the theory of computation by continuous-time dynamical systems was achieved, by showing that symmetric Hopfield nets operating in continuous time are capable of general computation although their dynamics is severely constrained by the Liapunov function.

The time complexity of learning in neural networks was studied and the NP-hardness results were proven for widely applied analog networks with the logistic activation function (even for a single sigmoidal unit) which had previously been reported by several researchers to be one of the main open problems in this area.

Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation ist der Theorie der Rechenstärke neuronaler Netze gewidmet, mit besonderem Schwerpunkt auf Analogmodellen, die mit kontinuierlicher Zeit operieren. Sie besteht aus zehn seit 1996 publizierten Arbeiten des Autors sowie einem Begleittext, der die Ergebnisse des Gebietes im Hinblick auf die existierende Literatur zusammenfasst. Im einleitenden Teil werden die grundlegenden Prinzipien neuronaler Netze anhand der Repräsentation implizierten Wissens in Expertensystemen illustriert. Außerdem wird eine neuartige Architektur für neuronale Expertensysteme vorgeschlagen, die auf einem gradientenbasiertes Lernen (Backpropagation) erlaubenden Analognetz beruht und mittels intervallwertiger Funktionen unvollständige Informationen verarbeiten kann und dabei eine einfache Vermittlung der verwendeten Schluweisen bietet.

Weiter wurde die Rechenstärke verschiedener neuronaler Netze durch den Vergleich mit traditionelleren Rechenmethoden untersucht, wodurch einige grundlegende Resultate erzielt wurden. Insbesondere wurde ein neuronaler Automat optimaler Größe für eine reguläre Sprache beschrieben. Eine neue subreguläre Klasse sogenannter Hopfieldsprachen, welche von symmetrischen Netzen als Eingabe verwendet werden können, wurde vollständig charakterisiert. Die genaue Umkehrung des bekannten Hopfieldschen Konvergenzsatzes wurde bewiesen, was bedeutet, da nicht nur alle symmetrischen Netze konvergieren, sondern auch sehr effizient alle konvergenten Rechenvorgänge in symmetrischen Netzen implementiert werden können.

Diese Resultate wurden auf analoge neuronale Modelle durch die Einführung einer allgemein einsetzbaren, stabilen Analogsimulation binärer Netze verallgemeinert. Auch wurde ein analoges symmetrisches Netz konstruiert, dessen Konvergenzverhalten dasjenige jeglicher Hopfieldnetze übertrifft, was nahelegt, da analoge Modelle mit Parametern begrenzter Genauigkeit effizienter sind als binäre. Darüber hinaus wurde das wichtige Problem der Energieminimierung für analoge Hopfieldnetze als NP-schwierig erwiesen, für ein Modell also, das zum Zweck der Optimierung tatsächlich zum Einsatz kommt. Schließlich wurde ein grundlegendes Ergebnis in der Berechenbarkeitstheorie mittels zeitlich-kontinuierlicher dynamischer Systeme erzielt, indem gezeigt wurde, da symmetrische Hopfieldnetze, die in kontinuierlicher Zeit arbeiten, zu allgemeiner Berechnung fähig sind, obwohl ihre Dynamik durch die Liapunovfunktion prinzipiell stark eingeschränkt ist.

Die Zeitkomplexität des Lernens in neuronalen Netzen wurde untersucht und NP-Schwierigkeit betreffende Ergebnisse für weithin verwendete analoge Netze mit logistischer Aktivierungsfunktion (sogar für eine einzelne sigmoidale Einheit) bewiesen, worum es sich um ein bislang von mehreren Forschern als eines der bedeutendsten offenen Probleme auf dem Gebiet handelt.