VLADIMÍR KVASNIČKA
JIŘÍ POSPÍCHAL

# Matematická logika

Slovenská technická univerzita
v Bratislave
2006

Lektori: doc. PhDr. Ján Šefránek, CSc.
doc. RNDr. Ladislav Satko, CSc.

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Schválilo vedenie Fakulty informatiky a informačných technológií STU v Bratislave
dňa **XX.X**.2005, číslo rozhodnutia **XX.X**/2005 pre študijný program Informatika

# OBSAH

# PREDHOVOR

Cieľom tejto učebnice je poskytnúť študentom informatiky na Fakulte informatiky a informačných technológií STU ucelený text k prednáške „*Matematická logika*“. Stáli sme pred neľahkou úlohou, ako vhodne vybrať obsah tejto prednášky, ktorá nielen tvorí jeden z teoretických fundamentov informatiky, ale mala by slúžiť aj pre rozvoj matematicko-logických schopností študentov. Kapitoly 1 až 8 prezentujú klasické disciplíny matematickej logiky a to výrokovú logiku a predikátovú logiku. Avšak už pri týchto klasických partiách logiky sme urobili dve významné odchýlky od moderných učebníc matematickej logiky. V kapitole 4 sa študujú neurónové siete v elementárnej verzii podľa McCullocha a Pittsa, ktorých práca z r. 1943 sa pokladá za jeden z míľnikov rozvoja umelej inteligencie a kognitívnej vedy. A naopak, kapitola 8 sa zaoberá sylogistikou, ktorá v stredoveku tvorila jeden z pilierov exaktnosti vtedajšieho univerzitného vzdelania. Aj keď teória sylogizmov je v súčasnosti pomerne jednoduchou aplikáciou predikátovej logiky, stále tvorí zaujímavú a ucelenú partiu logiky. Schopnosť jej využitia je pokladaná modernou kognitívnou vedou za jedno z experimentálne verifikovateľných kritérií našich schopností (správne ale aj nesprávne) usudzovať. Posledné štyri kapitoly 9 až 12 sú venované neklasickým logikám a aj tu sme urobili významnú odchýlku od klasického pojatia matematickej logiky. Dve kapitoly 10 a 11 sú venované fuzzy logike, ktorá tvorí jednu časť triády modernej výpočtovej inteligencie (ďalšími časťami tejto triády sú neurónové siete a evolučné algoritmy). Každá kapitola je sprevádzaná príkladmi, ktorých riešenie poskytne študentom schopnosť dobre sa orientovať v danej problematike. Chceme poďakovať mnohým našim študentom, ktorí nám pomohli nájsť veľa nepríjemných preklepov, nepresností a evidentných chýb a tým prispieť k zvýšeniu kvality tejto učebnice. Taktiež sa chceme poďakovať nášmu kolegovi a milému priateľovi prof. Ing. Norbertovi Frištackému, PhD, ktorý nás pri koncipovaní obsahu tejto učebnice upozornil na význam neklasických logík v modernej informatike a na ktorého radu sme zaradili do textu aj kapitolu, ktorá sa zaoberá modálnymi logikami. Dúfame, že týmito odchýlkami od klasickej prezentácie matematickej logiky sa nám podarilo vytvoriť modernú učebnicu základov matematickej logiky pre informatikov.

Chceme poďakovať oponentom doc. RNDr. Ladislavovi Satkovi, PhD. (FEI STU) a doc. PhDr. Jánovi Šefránkovi, PhD. (FMFI UK) za cenné pripomienky, ktoré prispeli k vylepšeniu tohto učebného textu.

V Bratislave, január 2006

Vladimír Kvasnička a Jiří Pospíchal

# 1 VÝROKOVÁ LOGIKA I

ČO JE LOGIKA? • VÝROK, PRAVDIVOSTNÁ HODNOTA A LOGICKÉ SPOJKY • JAZYK VÝROKOVEJ LOGIKY (SYNTAX) • PRAVDIVOSTNÉ OHODNOTENIE FORMÚL VÝROKOVEJ LOGIKY (SÉMANTIKA)

*V tejto kapitole si povieme, čo chápeme pod pojmami logika a matematická logika. Uvedieme si, čo to je výrok a ako „počítame" pravdivostné hodnoty výrokov, ktoré obsahujú logické spojky negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie a ekvivalencie. Ukážeme, ako tento výpočtový problém riešime pomocou tabuľkovej metódy. Ďalej si povieme zásady konštrukcie logických formúl (výrokov) a syntaktického stromu formuly, budeme špecifikovať syntax výrokovej logiky. Nakoniec ukážeme, ako zistiť, či je formula tautológia, kontradikcia alebo splniteľná, čo je sémantika výrokovej logiky a aké sú základné zákony výrokovej logiky – tautológie.*

## 1.1 ČO JE LOGIKA?

MODUS PONENS

Môžeme si položiť jednoduchú otázku – čo je logika? Odpoveď na túto jednoduchú otázku je, že logika je veda o správnom usudzovaní. Preto našu pozornosť musíme obrátiť na špecifikáciu pojmu „správne usudzovanie", čím sa správne usudzovanie odlišuje od nesprávneho? V logike študujeme také schémy usudzovania, ktoré sú správne (korektné) bez ohľadu na pravdivosť alebo nepravdivosť ich zložiek. Uvažujme dvojicu jednoduchých tvrdení – výrokov: „*prší*" a „*ak prší, potom je cesta mokrá*". Z týchto dvoch tvrdení – výrokov vyplýva nové tvrdenie „*cesta je mokrá*". Uvažujme ďalšiu podobnú dvojicu tvrdení: „*Milan je smädný*" a „*ak je Milan smädný, potom zháňa limonádu*". Záver z týchto dvoch tvrdení je, že „*Milan zháňa limonádu*". Ak porovnáme túto dvojicu usudzovaní, zistíme, že aj keď sú diametrálne odlišné obsahovo, majú veľa spoločného. V oboch prípadoch existujú dve nezávislé tvrdenia (v ďalšom texte ich budeme nazývať výroky), ktoré označíme[1] symbolmi $p$ a $q$, pričom prvé tvrdenie je totožné s „$p$“ a druhé tvrdenie má tvar „*ak p, potom q*“. Záver z týchto dvoch tvrdení je „$q$“, ktoré predtým nevystupovalo samostatne, ale len ako časť zložitejšieho tvrdenia „*ak p, potom q*“. To znamená, že v procese usudzovania výrok „$q$“ je vyvodený z pôvodných predpokladov „$p$“ a „*ak p, potom q*“, čo sa obvykle zapisuje takto

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \Rightarrow q} \\ q \end{array}$$

Táto formálna schéma usudzovania sa už od čias stredoveku označuje ako *modus ponens* a patrí medzi základne pravidlá správneho (logického) usudzovania.

MATEMATICKÁ LOGIKA A BOOLOVA ALGEBRA

Naznačená formalizácia našej hovorovej reči je pre logiku charakteristická, logika študuje všeobecné formy usudzovania na symbolickej úrovni, v ktorej sa ignoruje konkrétny obsah jednotlivých tvrdení. Z týchto dôvodov býva aj moderná logika označovaná ako *formálna logika* alebo *matematická logika* (v prvej polovici 20. storočia sa používal aj termín logistika, ktorý však v súčasnosti, hlavne pod vplyvom americkej angličtiny, má diametrálne odlišný význam a označuje procesy zásobovania alebo zabezpečenia potrebným materiálom). Nebudeme odlišovať formálnu logiku od matematickej, základným momentom v oboch prípadoch je nielen používanie symbolov a ich zgrupovania pomocou logických spojok (jazykové prostriedky typu „...*a*...“, „...*alebo*...“, „*ako*..., *potom*...“, ...) do väčších celkov nazývaných formuly, ale aj formalizácia procesu transformácie danej formuly na inú formulu metódami, ktoré sú charakteristické pre matematiku. Tak napríklad, výroková logika môže byť chápaná ako špeciálny druh algebry (Boolovej), obsahujúcej premenné (výroky), unárne a binárne operácie nad týmito premennými (logické spojky) a kde taktiež existuje striktný matematický systém odvodzovania nových formúl pomocou povolených operácií z jednoduchších formúl (axióm).

FILOZOFICKÁ LOGIKA

Použitie matematických metód v logike nie je samoúčelné. Umožnilo získať hlboké výsledky, ktoré odlíšili modernú logiku 20. storočia definitívne od klasickej neformálnej logiky predchádzajúcich období. Predmetom záujmu tohto učebného textu je práve štúdium matematickej logiky, ktorá je založená na formalizácii prirodzeného jazyka pomocou výrokových symbolov a logických spojok, pričom

[1] Používanie symbolov abecedy miesto konkrétnych tvrdení typu „*Milan je smädný*“ alebo „*prší*“ pochádza od gréckeho filozofa Aristotela (384-322 pr. n. l.), ktorý je považovaný za zakladateľa logiky. Toto používanie symbolov, namiesto konkrétnych tvrdení, je pokladané súčasnou históriou vedy za veľký civilizačný obrat. Grécka civilizácia sa ním odlíšila od babylonskej a egyptskej civilizácie, pre ktoré bol pojem symbolu ešte neznámy nielen v ešte neexistujúcej logike, ale aj pri popise matematických algoritmov (napr. výpočet plochy obdĺžnikovej oblasti). Prvé algoritmy operovali iba s konkrétnymi číslami a boli preto veľmi ťažkopádne.

usudzovanie je formalizované pomocou niekoľkých jednoduchých pravidiel. Snáď si teraz už môžeme položiť otázku, aký je rozdiel medzi matematickou a nematematickou logikou? Ako už bolo uvedené, predmetom nášho záujmu bude matematická logika. Môžeme sa teda pýtať, čo ešte zostáva v logike okrem matematickej logiky. Obvykle sa uvádza, že logika sa delí na dve časti: na matematickú logiku a na filozofickú logiku. Toto delenie má svoje historické pozadie, ktoré tu nebudeme hlbšie špecifikovať. V súčasnosti sa zdá byť už umelým, neprirodzeným a prekonaným.

MOMENT ČASU A MODALITA

Za zakladateľa logiky je považovaný grécky staroveký filozof Aristoteles (384-322 pr. n. l.). Od dôb staroveku až po súčasnú dobu, logika bola predmetom intenzívneho záujmu mnohých učencov, bolo objavených mnoho nových koncepcií a tematických okruhov, ktoré definitívne odlíšili stredovekú a novovekú logiku od starovekej Aristotelovskej logiky. Hlavné tematické okruhy logiky boli charakteru filozofického a zaoberali sa fundamentálnymi otázkami o podstate ľudského usudzovania. Až na prelome 19. a 20. storočia nastala výrazná matematizácia logiky, pričom sa riešili hlavne problémy formalizácie ľudského usudzovania. V tomto období vznikal dojem, že v logike existujú problémy, ktoré sú touto matematizáciou nepostihnuteľné a preto sú výlučnou doménou tzv. filozofickej logiky. Tak napr. moment času v usudzovaní (výrok „*niekedy v minulosti padal sneh*“) alebo modalita (stupeň istoty určitého súdu) výrokov („*je možné, že padá sneh*“) boli považované za nepostihnuteľné matematickými metódami. Štúdium týchto a podobných aspektov bolo považované za výlučnú doménu filozofickej logiky, ktorá sa týmto pomerne jasne oddelila od matematickej logiky, ktorá akoby sa zaoberala len štúdiom jednoduchých usudzovaní, ktoré nie sú časovo alebo modálne štruktúrované. Postupne sa však ukazovalo, že aj tieto aspekty logiky sú dobre matematicky formalizovateľné a že delenie logiky na matematickú a filozofickú nemá hlbšieho opodstatnenia.

NEKLASICKÉ LOGIKY

V našom texte budeme pomerne často hovoriť o neklasických logikách. Ako odlíšime klasickú logiku od neklasickej logiky? V klasickej logike sa postuluje, že výroky sú dvojhodnotové, t. j. sú buď pravdivé alebo nepravdivé, žiadna iná tretia možnosť neexistuje. Naviac, elementárne výroky spájame do väčších zložitejších výrokov pomocou logických spojok („*...a...*“, „*...alebo...*“, „*ako..., potom...*“, ...), pričom pravdivosť týchto nových výrokov je plne určená pomocou pravdivostných hodnôt jej elementárnych výrokov a použitými logickými spojkami. Pravdivostné hodnoty týchto zložených výrokov sú vytvárané pomocou „klasických“ tabuliek známych už od stredoveku, ktoré študenti obvykle už poznajú zo strednej školy. Tak napríklad, vieme, že výrok „*p* a *q*“ je pravdivý len vtedy, ak obe jeho zložky sú súčasne pravdivé, vo všetkých ostatných troch prípadoch je výrok nepravdivý. Neklasické logiky môžu mať viac hodnôt pravdivosti výrokov. Ďalšia črta „neklasičnosti“ logiky môže spočívať v tom, že používame nové logické spojky, ktoré nie sú obvyklé v klasickej logike. Tieto nové spojky môžu vyjadrovať buď časové alebo modálne aspekty výrokov, alebo môžu byť dokonca ternárne (spájajúce tri elementárne výroky do nového zložitejšieho výroku).

LOGIKA A INFORMATIKA

Na záver tejto kapitoly uvedieme ešte niekoľko poznámok o význame matematickej logiky pre informatiku. V informatike existujú odbory, ktoré sa zaoberajú simuláciou ľudského usudzovania (umelá inteligencia, expertné systémy a pod.). Preto potrebujeme metódy algoritmizácie postupov usudzovania, ktoré nám poskytuje matematická logika svojim formálno-matematickým aparátom. Môžeme teda konštatovať, že *matematická logika tvorí jeden z pilierov moderných metód umelej inteligencie*. Umožňuje do určitej miery formalizovať prirodzený jazyk pomocou výrokov a logických spojok. Pomocou zákonov usudzovania matematickej logiky môžeme vyvodzovať deduktívnym spôsobom z takto formalizovaných poznatkov nové poznatky, ktoré neboli v pôvodnej „databáze“ explicitne obsiahnuté.

# 1.2 VÝROK, PRAVDIVOSTNÁ HODNOTA A LOGICKÉ SPOJKY

VÝROK A JEHO PRAVDIVOSŤ

Výroková logika [1,4-6,10,14,21,25,28] študuje také formy usudzovania, pre ktoré platnosť záverov nezávisí od obsahu a ani od vnútornej štruktúry výrokov, ale výlučne len od pravdivosti či nepravdivosti týchto výrokov. Analyzujme tieto jednoduché oznamovacie vety:

(1) Atóm je fyzikálna štruktúra.
(2) Atóm je sociálna štruktúra.
(3) Vo vesmíre existuje život aj mimo Zeme.
(4) Láska je rádioaktívna.
(5) Rast nášho hospodárstva má neustálu tendenciu.

Medzi uvedenými piatimi vetami sú veľké rozdiely. Možno konštatovať, že veta (1) je pravdivá, zatiaľ čo veta (2) je nepravdivá. Pri (3) zatiaľ nemôžeme rozhodnúť o jej pravdivosti alebo nepravdivosti. Veta (4) je síce gramaticky správna, ale je to zrejmý nezmysel vzhľadom na predikát „rádioaktívny“, čiže nemá zmysel uvažovať o jej pravdivosti alebo nepravdivosti. Napokon skladba vety (5) je chybná, takže nemá vôbec žiadny zmysel sa pýtať na jej pravdivosť alebo nepravdivosť. Po týchto jednoduchých ilustračných príkladoch môžeme pristúpiť k tejto definície výroku.

**DEFINÍCIA 1.1.**

***Elementárny výrok*** *je jednoduchá oznamovacia veta, pri ktorej má zmysel pýtať sa, či je alebo nie je pravdivá. Elementárne výroky budeme označovať malými písmenami abecedy* $p$, $q$, $r$, $s$, $p_1$, $p_2$, ... . ***Pravdivostná hodnota*** *výroku* $p$ *bude označená* $val(p)$, *pričom, ak výrok* $p$ *je pravdivý (nepravdivý), potom* $val(p)=1$ ($val(p)=0$).

SPOJKY

Prirodzený jazyk obsahuje spojky (napr. *a*, *alebo*, *ak..., potom...*, *je ekvivalentné*, *nie je pravda, že...*) pomocou ktorých z elementárnych výrokov vytvárame zložitejšie výroky (výroky), pričom ich pravdivosť alebo nepravdivosť je určená len pravdivostnými hodnotami ich zložiek (elementárnych výrokov). Vo výrokovej logike sa používa jedna unárna logická spojka a štyri binárne spojky nazývané konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia (pozri Tabuľka 1).

NEGÁCIA

(1) *Negácia.* Táto unárna logická spojka pre výrok $p$ má formu „nie je pravda, že $p$“, čo zapíšeme pomocou symbolu negácie takto: $\neg p$ . Za premennú $p$ môžeme dosadiť nejaký konkrétny výrok, ktorý je pravdivý alebo nepravdivý. Ak je tento výrok pravdivý (nepravdivý), potom jeho negácia je nepravdivá (pravdivá), formálne $val(\neg p) = 1 - val(p)$.

KONJUNKCIA

(2) *Konjunkcia*. Binárna symetrická spojka z dvoch výrokov $p$, $q$ vytvára nový výrok „$p$ a $q$“, ktorý je formálne označený „$p \wedge q$“. Pre konkrétnosť uvažujme zložený výrok „Peter je v škole a Milan je v kine“, kde elementárne výroky sú $p$=(Peter je v škole) a $q$=(Milan je v kine). Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí od pravdivostných hodnôt jeho zložiek, pričom nutným predpokladom, aby jeho pravdivostná hodnota bola pravda je pravdivosť oboch jeho zložiek, $val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}$ .

DISJUNKCIA

(3) *Disjunkcia*. Binárna symetrická logická spojka z dvoch výrokov $p$, $q$ vytvára nový výrok „$p$ alebo $q$“, ktorý je formálne označený „$p \vee q$“. K tomu, aby bol pravdivý zložený výrok $p \vee q$, nutne aspoň jedna jeho zložka musí byť pravdivá; ak sú obe nepravdivé, potom pravdivostná hodnota zloženého výroku je nepravda, $val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}$ .

IMPLIKÁCIA

(4) *Implikácia.* Táto binárna logická spojka z dvoch výrokov $p$ a $q$ vytvára nový výrok „ak $p$, potom $q$“, alebo „$p$ implikuje $q$“, formálne „ $p \Rightarrow q$ “. Na rozdiel od logických spojok konjunkcie a disjunkcie, vzťah pravdivostnej hodnoty implikácie $p \Rightarrow q$ k pravdivostným hodnotám jej zložiek je o mnoho zložitejší a závislý na konvenciách prirodzeného jazyka. Budeme postulovať, že implikácia je nepravdivá len vtedy, ak $val(p)$=1 a $val(q)$=0, pre všetky ostatné pravdivostné hodnoty $p$ a $q$ je pravdivá. Takto špecifikovanú implikáciu môžeme alternatívne vyjadriť $val(p \Rightarrow q) = min\{1, 1 - val(p) + val(q)\}$ .

FREGE: PRÍČINNÁ SÚVISLOSŤ

Dosaďme napríklad v implikácii za $p$ nepravdivý výrok „*5+2=8*“ a za $q$ pravdivý výrok „*Masaryk bol prvý prezident Československa*“. Podľa Tabuľky 1.1, implikácia $p \Rightarrow q$ je pravdivá pre nepravdivé $p$ a pravdivé $q$, potom zložený výrok „*pretože 5+2=8, potom Masaryk bol prvý prezident Československa*“ je pravdivý výrok, aj keď bežný čitateľ bude pokladať tento výrok za nepravdivý ba až nezmyselný. Jeden zo zakladateľov modernej logiky G. Frege (1848-1925) navrhol riešiť tento problém tak, že v rámci implikácie sa môžu vyskytovať len výroky, ktoré sú v príčinnej súvislosti. Tieto problémy s určením pravdivostných hodnôt implikácie viedli v prvej polovici 20. storočia niektorých logikov k štúdiu tzv. *neklasických logík* (pozri kap. 12), ktoré majú jemnejšie prostriedky na špecifikáciu implikácie (chápanej ako relácia príčinného vzťahu).

EKVIVALENCIA

(5) *Ekvivalencia*. Táto binárna symetrická logická spojka „$p$ je ekvivalentné $q$“, formálne „ $p \equiv q$ “, je pravdivá len vtedy, ak jej elementárne výroky $p$ a $q$ sú súčasne buď pravdivé alebo nepravdivé. Formálne túto skutočnosť vyjadríme pomocou relatívne komplikovaného vzťahu:

$val(p \equiv q) = min\{min\{1, 1 - val(p) + val(q)\}, min\{1, 1 - val(q) + val(p)\}\}$ .

V matematike sa táto logická spojka často používa v týchto dvoch alternatívnych jazykových formách: „*p* je nutnou a dostatočnou podmienkou *q*“ alebo „*p* práve vtedy a len vtedy ak *q*“.

**Tabuľka 1.1.** Funkčné vyjadrenie pravdivostných hodnôt logických spojok

| logická spojka | funkčné vyjadrenie pravdivostnej hodnoty |
|---|---|
| $\neg p$ | $val(\neg p) = 1 - val(p)$ |
| $p \wedge q$ | $val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}$ |
| $p \vee q$ | $val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}$ |
| $p \Rightarrow q$ | $val(p \Rightarrow q) = min\{1, 1 - val(p) + val(q)\}$ |
| $p \equiv q$ | $val(p \equiv q) = min\{min\{1, 1 - val(p) + val(q)\}, min\{1, 1 - val(q) + val(p)\}\}$ |

Pravdivostné hodnoty jednotlivých logických spojok špecifikovaných vyššie sú uvedené v tabuľke 1.2. Poznamenajme, že všetkých možných binárnych logických spojok je 16, v tabuľke sú uvedené len štyri základné logické spojky, ostatné sa dajú vyjadriť pomocou týchto základných zložiek.

**Tabuľka 1.2**. Pravdivostné hodnoty základných logických spojok

| $p$ | $q$ | $\neg p$ (negácia) | $p \wedge q$ (konjunkcia) | $p \vee q$ (disjunkcia) | $p \Rightarrow q$ (implikácia) | $p \equiv q$ (ekvivalencia) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 1.3 JAZYK VÝROKOVEJ LOGIKY (SYNTAX)

KONŠTRUKCIA FORMÚL

Zavedieme formálny systém pre konštrukciu formúl výrokovej logiky, ktorý spočíva v špecifikácii postupu konštrukcie zložitých výrokov (ktoré budeme nazývať tiež výrokové formuly) pomocou iných výrokov (buď elementárnych alebo zložitých) a logických spojok. Nech $\boldsymbol{P}=\{p,q,r,...,p_1,p_2,...\}$ je množina elementárnych výrokov (ktoré budeme nazývať výrokové premenné); výrokové konštanty $\{0,1\}$ sú pravdivostné hodnoty.

**DEFINÍCIA 1.2.**

*Výroková formula nad množinou **P** výrokových premenných je zostrojená opakovaným použitím týchto dvoch pravidiel:*

(1)*Každá výroková premenná $p\in\boldsymbol{P}$ alebo výroková konštanta je výroková formula.*

(2)*Ak výrazy $\varphi$ a $\psi$ sú výrokové formuly, potom aj výrazy $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\Rightarrow\psi)$ a $(\varphi\equiv\psi)$ sú výrokové formuly.*

NEJEDNOZNAČNOSŤ

Obvykle sa ešte zdôrazňuje, že žiadne iné výrazy, ako tie, ktoré môžu vzniknúť opakovaným použitím pravidiel (1) a (2), nie sú formulami výrokovej logiky. Zátvorky sa používajú ako pomocné symboly, pomocou ktorých môžeme odstrániť prípadnú nejednoznačnosť výrokových formúl[2]. Uvažujme formulu $p\wedge q\vee r$, pomocou zátvoriek môžeme ju interpretovať dvoma rôznymi spôsobmi $(p\wedge q)\vee r$ a $p\wedge(q\vee r)$.

**DEFINÍCIA 1.3.**

*Konštrukcia formuly $\varphi$ nad množinou **P** je tvorená postupnosťou formúl $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$, pričom posledný prvok $\varphi_n$ je totožný s formulou $\varphi$, pre každé $i=1,2,...,n$ platí jedna s týchto troch možností:*

*(1) $\varphi_i$ je výroková premenná z **P** alebo výroková konštanta.*

*(2) $\varphi_i$ vznikla z niektorého z prvkov množiny $\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{i-1}\}$ aplikáciou unárnej logickej spojky negácie, $\varphi_i=(\neg\varphi_j)$, pre $j=1,2,...,i-1$.*

*(3) $\varphi_i$ vznikla z niektorých dvoch prvkov množiny $\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{i-1}\}$ aplikáciou binárnej logickej spojky, napr. $\varphi_i=(\varphi_j\wedge\varphi_k)$, pre $j<k=1,2,...,i-1$.*

*Prvky postupnosti $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$ sa nazývajú* ***podformuly*** *formuly $\varphi$, $\varphi_i\subset\varphi$ pre $i=1,2,...,n$ .*

---

[2] V logike sa zvyčajne používa táto priorita logických spojok, uvádzame s klesajúcou prioritou: 1. $\neg$, 2. $\wedge$, $\vee$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\equiv$

SLOVÁ NAD ABECEDOU

Formuly môžeme chápať ako slová, ktoré sú zostrojené nad abecedou $P$ výrokových premenných a logických spojok (a taktiež pomocných zátvoriek). Tvorba týchto slov je určená pomocou dvoch pravidiel z definície 1.2, pričom spôsob konštrukcie slova je špecifikovaný postupnosťou $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ z definície 1.3. Ak predpokladáme, že táto postupnosť má minimálnu dĺžku, potom formula $\psi$ má len podformuly z tejto postupnosti, iné podformuly nemá. Hovoríme, že podformula $\psi'$ je jednoduchšia ako formula $\psi$ v tom zmysle, že obsahuje menej logických spojok ako pôvodná formula $\psi$. Podformula, ktorá neobsahuje logické spojky už nemôže byť ďalej rozložená na podformuly, preto sa nazýva ***elementárna formula*** alebo ***výroková premenná***.

ROVNAKÉ FORMULY A MIMOLOGICKÉ SYMBOLY

V definíciách 1.2 a 1.3 sme použili mimologické symboly $\varphi$, $\psi$, ..., ktoré reprezentujú formuly vyjadrené reťazcami symbolov zostrojených nad abecedou, ktorá obsahuje nielen výrokové premenné, ale aj symboly pre logické spojky a zátvorky (a taktiež aj mimologické symboly reprezentujúce podformuly). Potom môžeme povedať, že dve formuly $\varphi$ a $\psi$ sú ***rovnaké***, $\varphi = \psi$, keď sú reprezentované rovnakými reťazcami symbolov.

BACKUSOVA A NAUROVA FORMA

V teórii formálnych jazykov [7,18] je zvykom špecifikovať ich syntax pomocou Backusovej a Naurovej formy (BNF), použijeme tento prístup aj pre alternatívne určenie syntaxu formúl výrokovej logiky:

☞

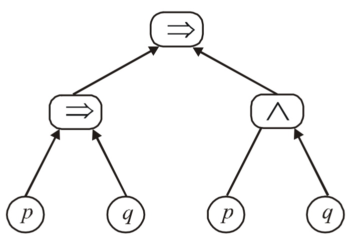
$$\begin{aligned}\langle \textit{formula} \rangle ::= & \langle \textit{výroková premenná} \rangle \mid \\ & \langle \textit{logická konštanta} \rangle \mid \\ & (\neg \langle \textit{formula} \rangle) \mid \\ & (\langle \textit{formula} \rangle \langle \textit{logická spojka} \rangle \langle \textit{formula} \rangle)\end{aligned}$$

$$\langle \textit{výroková premenná} \rangle ::= p \mid q \mid r \mid ... \mid p_1 \mid p_2 \mid p_3 \mid ...$$

$$\langle \textit{výroková konštanta} \rangle ::= 0 \mid 1$$

$$\langle \textit{logická spojka} \rangle ::= \Rightarrow \mid \wedge \mid \vee \mid \equiv$$

**OBRÁZOK 1.1.** SYNTAKTICKÝ STROM




Syntaktický strom formuly $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$. Koncové vrcholy stromu reprezentujú výrokové premenné $p$ a $q$, vrcholy z nasledujúcich vrstiev sú priradené spojkám implikácie a konjunkcie. Vyhodnocovanie tohto stromu prebieha postupne zdola nahor.

**PRÍKLAD 1.1.** Nech $\boldsymbol{P} = \{p, q, r, s\}$ je množina výrokových premenných, potom

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$

$$((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg s))$$

$$((\neg p \wedge (r \vee s)) \wedge (p \Rightarrow s))$$

sú výrokové formuly, zatiaľ čo

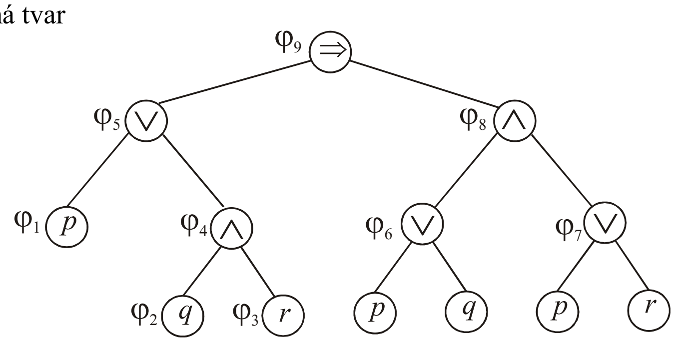
$$(\Rightarrow (\wedge p))$$

$$((\Rightarrow \Rightarrow s) \Rightarrow p)$$

nie sú výrokové formuly. Každá výroková formula je reprezentovaná pomocou grafického útvaru nazývaného *syntaktický strom,* pozri obr. 1.1.

**PRÍKLAD 1.2.**
PODFORMULY

Študujme formulu $\varphi = ((p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$, syntaktický strom formuly má tvar




Jednotlivé podformuly sú určené takto:

$$\varphi_1 = p, \varphi_2 = q_1, \varphi_3 = r, \varphi_4 = q \wedge r,$$

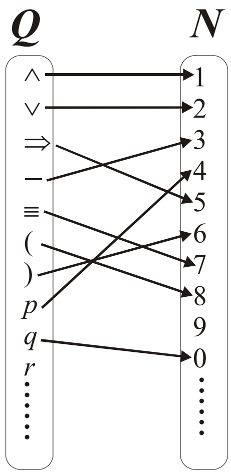
$$\varphi_5 = p \vee \varphi_4 = p \vee (q \wedge r),$$

$$\varphi_6 = p \wedge q, \ \varphi_7 = p \wedge r,$$

$$\varphi_8 = \varphi_6 \wedge \varphi_7 = (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

$$\varphi = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_9 = ((p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$$

**OBRÁZOK 1.2.** PROSTÉ ZOBRAZENE




Znázornenie prostého zobrazenia *f* množiny znakov ***Q*** na množinu prirodzených čísel ***N***.

KOĽKO EXISTUJE FORMÚL?

Môžeme si položiť otázku, koľko existuje formúl pre danú množinu ***P*** výrokových premenných. Ak je táto množina spočetná (t. j. existuje prosté zobrazenie tejto množiny na množinu prirodzených čísel), potom počet všetkých možných výrokových formúl nie je viac ako počet všetkých možných reťazcov, ktoré možno vytvoriť nad množinou $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} \cup \{-,\wedge,\vee,\Rightarrow,\equiv,),(\}$,

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q} \cup \ldots = \bigcup_{n\geq 1} \boldsymbol{Q}^n \tag{1.1}$$

Uvažujme reťazec $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}$, ktorý obsahuje $n \geq 1$ znakov (či táto postupnosť reprezentuje výrokovú formulu alebo nie, je irelevantné, zaujímame sa len o horný odhad počtu výrokových formúl). Predpokladajme, že nad množinou ***Q*** je definované prosté zobrazenie (funkcia) $f : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{N}$, kde ***N*** je množina prirodzených čísel, pozri obr. 1.2.

KAŽDÉMU REŤAZCU ČÍSLO

Nech $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \boldsymbol{R}$ je reťazec zostrojený nad množinou ***R***, pomocou zobrazenia *f* každý znak *x* tohto reťazca je jednoznačne ohodnotený prirodzeným číslom *f*(*x*), potom reťazcu ***x*** môžeme jednoznačne priradiť prirodzené číslo pomocou tohto predpisu

$$F(\boldsymbol{x}) = p_1^{f(x_1)} p_2^{f(x_2)} p_3^{f(x_3)} \ldots = \prod_{i\geq 1} p_i^{f(x_i)} \tag{1.2}$$

kde $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... sú prvé tri prvočísla. Z teórie čísel vieme, že každé prirodzené číslo môžeme jednoznačne vyjadriť pomocou súčinov prvočísiel typu pravej strany (1.2) (napr. $120=2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$), To znamená, že každému reťazcu ***x*** pomocou funkcie *F* jednoznačne priradíme prirodzené číslo. Týmto sme konštruktívne dokázali, že existuje prosté zobrazenie

$$F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{N} \tag{1.3}$$

ktoré ľubovolný reťazec znakov $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ jednoznačne ohodnotí prirodzeným číslom. Týmto sme dokázali dôležitú vetu výrokovej logiky:

☞ **Veta 1.1.** *Množina všetkých formúl výrokovej logiky, ktoré sú vytvorené nad spočetnou množinou výrokových premenných, je spočetná.*

# 1.4 PRAVDIVOSTNÉ OHODNOTENIE FORMÚL VÝROKOVEJ LOGIKY (SÉMANTIKA)

Ako už bolo povedané v predchádzajúcej časti tejto kapitoly, syntax formúl výrokovej logiky je jednoznačne určená spôsobom ich konštrukcie, pomerne ľahko vieme rozhodnúť, či daná formula ma korektnú syntax, alebo nemá.

Vyššie špecifikovaný spôsob konštrukcie výrokových formúl nazývame *syntaxou výrokovej logiky*. Podobne ako v prirodzenom jazyku, kde syntax špecifikuje tvar vety, nie všetky vety, ktoré môžeme zostrojiť jednoduchým zreťazením slov, sú syntakticky korektné. Podobne aj vo výrokovej logike, nie každé zreťazenie prípustných symbolov nám definuje formulu, existujú formuly, ktoré nie sú syntakticky správne.

SÉMANTIKA

Ďalší pojem dôležitý pre výrokovú logiku je *sémantika*. Pojem pochádza z teórie prirodzených jazykov, kde sémantika špecifikuje význam danej vety (ktorá ma tiež aj svoju syntax). Vo výrokovej logike, ktorá sa zaoberá len pravdivostnými hodnotami premenných a ich formúl, *sémantika* nie je veľmi bohatá. Sémantika výrokovej formuly je vlastne tabuľka pravdivostných hodnôt formuly pre rôzne hodnoty jej výrokov. Tak napríklad: pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$, ktorá má korektnú syntax (napr. reprezentovanú syntaktickým stromom), je jej sémantika plne určená ďalej uvedenou tabuľkou jej pravdivostných hodnôt pre všetky štyri kombinácie výrokov $p$ a $q$.

PRAVDIVOSTNÁ HODNOTA A INTERPRETÁCIA PREMENNÝCH

Uvažujme formulu výrokovej logiky $A$, ktorej výrokové premenné $p_1, p_2, ..., p_n$ sú špecifikované interpretáciou $\tau$, ktorá určuje pravdivostné hodnoty jej premenných. Táto *interpretácia premenných* $\tau = (p/\tau_1, q/\tau_2, ..., r/\tau_n)$, kde $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in \{0,1\}$, spočíva v priradení binárnych pravdivostných hodnôt jednotlivým premenným. Rôznych interpretácií premenných $\tau$, ktoré sú priradené $n$ výrokovým premenným je $2^n$. Pravdivostná hodnota formuly $\varphi$ pre danú interpretáciu $\tau$ je označená výrazom $val_\tau(\varphi)$.

Ako bude prebiehať výpočet $val_\tau(\varphi)$? V súhlase s definíciou 1.3 predpokladajme, že konštrukcia formuly $\varphi$ je tvorená postupnosťou formúl $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, pričom $\varphi = \varphi_n$. Pravdivostné vyhodnotenie jednotlivých členov postupnosti pre

$i = 1, 2, ..., n$ sa vykonáva takto:

(1) Ak $\varphi_i$ je výroková premenná, potom $val_\tau(\varphi_i)$ je určená priamo interpretáciou $\tau$, ktorá špecifikuje pravdivostné hodnoty premenných.

(2) Ak $\varphi_i$ nie je výroková premenná a vznikla z niektorého z prvkov množiny $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ aplikáciou unárnej logickej spojky negácie, $\varphi_i = (\neg\varphi_j)$, pre $j = 1, 2, ..., i-1$, potom $val_\tau(\varphi_i) = 1 - val_\tau(\varphi_j)$.

(3) Ak $\varphi_i$ nie je výroková premenná a vznikla z niektorých dvoch prvkov množiny $\varphi_j, \varphi_k \in \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ aplikáciou binárnej logickej spojky, potom $val_\tau(\varphi_i)$ je vyhodnotený na základe tabuľky 1.1 pomocou už známych pravdivostných hodnôt $val_\tau(\varphi_j)$ a $val_\tau(\varphi_k)$. Tak napríklad, nech $\varphi_i = (\varphi_j \wedge \varphi_k)$, pre $j < k < i$, potom $val_\tau(\varphi_i) = val_\tau(\varphi_j) \cdot val_\tau(\varphi_k)$.

Tento rekurentný postup je názorne realizovaný pomocou tabuľkovej metódy, kde postupne počítame pravdivostné hodnoty jednotlivých podformúl pre všetky možné interpretácie $\tau$.

**PRÍKLAD 1.3.** Tabuľková metóda bude ilustrovaná výpočtom pravdivostných hodnôt formuly $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$

**Tabuľka 1.3.** Výpočet pravdivostných hodnôt formuly $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $1 \Rightarrow 2$ | $1 \wedge 2$ | $3 \Rightarrow 4$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Z tejto tabuľky vyplýva, že existujú také pravdivostné hodnoty premenných $p$ a $q$ ($p$=0, $q$=0 a $p$=0, $q$=1), pre ktoré je pravdivostná hodnota danej výrokovej formuly nepravda (0).

TAUTOLÓGIA

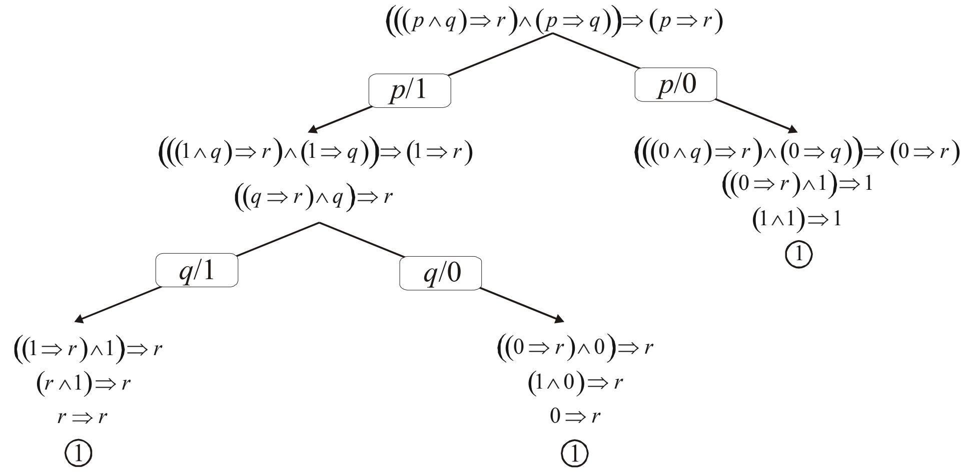
Vo výrokovej logike majú mimoriadne postavenie také formuly, ktorých pravdivostná hodnota je pravda pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt premenných vo všetkých riadkoch. Takéto formuly nazývame *tautológie* a majú postavenie „zákonov“ výrokovej logiky. Ich používanie pri odvodzovaní nových formúl zabezpečuje, že sú taktiež tautológie.

***DEFINÍCIA 1.4.***

*Formula φ sa nazýva* ***tautológia*** (*čo vyjadríme* $\models \varphi$), *ak pre každú interpretáciu τ platí* $val_\tau(\varphi)=1$*; v opačnom prípade, ak pre každú interpretáciu τ platí* $val_\tau(\varphi)=0$*, formula sa nazýva* ***kontradikcia****. Ak existuje aspoň jedna interpretácia τ taká, že* $val_\tau(\varphi)=1$*, potom formula φ je* ***splniteľná*** (to znamená, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnosti).

Túto definíciu môžeme parafrázovať tak, že všetky formuly, ktoré nie sú kontradikcie sú splniteľné a tautológie sú také splniteľné formuly, ktoré sú pre všetky možné interpretácie τ pravdivé.

**OBRÁZOK 1.3.** BINÁRNY STROM PRE VÝPOČET PRAVDIVOSTNÝCH HODNÔT VÝROKOVEJ FORMULY




Binárny strom pre výpočet pravdivostných hodnôt výrokovej formuly obsahujúcej tri premenné. Výrokové premenné sú postupne nahradzované konštantami, pre ktoré môže byť formula podstatne zjednodušená až na výslednú výrokovú konštantu, ktorá určuje pravdivostnú hodnotu formuly pre prípad, že niektoré premenné sú nahradené konštantami. Napríklad, pravá horná vetva stromu ukazuje, že $\varphi(p/0,q,r)\equiv 1$, pre ľubovolné pravdivostné hodnoty premenných $q$ a $r$.

Niektoré tautológie sa často používajú nielen v samotnej výrokovej logike, ale aj v bežnom usudzovaní a sú obvykle označované aj vlastným menom. Väčšinou ide o tautológie tvaru ekvivalencie, ktoré umožňujú nahradzovať jedny formuly inými bez straty vlastnosti ich tautologickosti. Medzi najznámejšie zákony výrokovej logiky patria tieto tautológie:

NAJZNÁMEJŠIE TAUTOLÓGIE

☞

(1) Zákon totožnosti $\vDash (p \Rightarrow p)$.

(2) Zákon dvojitej negácie $\vDash (\neg\neg p \equiv p)$.

(3) Zákon vylúčenia tretieho $\vDash (p \vee \neg p)$.

(4) De Morganov zákon pre konjunkciu $\vDash (\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q))$.

(5) De Morganov zákon pre disjunkciu $\vDash (\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q))$.

(6) Zákon ekvivalencie $\vDash ((p \equiv q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)))$

(7) Zákon tranzitívnosti implikácie[3] $\vDash (p \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

(8) Distribúcia konjunkcie $\vDash ((p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$.

(9) Distribúcia disjunkcie $\vDash ((p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$.

(10) Zákon kontrapozície $\vDash ((p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p))$

(11) Zákon „reductio ad absurdum“ $\vDash (((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p)$.

(12) Zákon nahradenia implikácie $\vDash ((p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q))$.

(13) Zákon „modus ponens“ $\vDash ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

Platnosť všetkých týchto zákonov môžeme prekontrolovať pre všetky pravdivostné hodnoty premenných pomocou tabuľkovej metódy (t. j., sú to tautológie).

Na záver tejto kapitoly ešte ukážeme spôsob, ako pomocou postupného vyhodnocovania syntaktických stromov (pozri obr. 1.1) je možné podstatne zjednodušiť výpočet pravdivostnej hodnoty výrokovej formuly. Uvažujme formulu

$$(((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Na obr. 1.3 je znázornený binárny strom postupného vyhodnocovania formuly, v prvom kroku premennú $p$ nahradíme výrokovými konštantami 1 a 0, vyhodnotíme a zjednodušíme takto modifikované formuly, postupne dosadzujeme výrokové konštanty za ostatné premenné. Tento proces obvykle končí tak, že sme schopní ešte v prvej fáze tohto procesu zistiť, či formula pre širokú triedu pravdivostných konštánt je pravdivá alebo nepravdivá. Pri zjednodušovaní formúl využívame tieto formule – tautológie:

(1) implikácia $(p \Rightarrow 0) \equiv \neg p,\ \ (p \Rightarrow 1) \equiv 1,\ \ (0 \Rightarrow p) \equiv 1,\ \ (1 \Rightarrow p) \equiv p$,

(2) disjunkcia $(p \vee 0) \equiv p,\ \ (p \vee 1) \equiv 1,\ \ (p \vee \neg p) \equiv 1$,

(3) konjunkcia $(p \wedge 0) \equiv 0,\ \ (p \wedge 1) \equiv p,\ \ (p \wedge \neg p) \equiv 0$.

[3] Tradičný názov je zákon hypotetického sylogizmu.

# ZHRNUTIE

LOGIKA

Logika je veda o správnom usudzovaní. Logika študuje také schémy usudzovania, ktoré sú správne (korektné) bez ohľadu na pravdivosť či nepravdivosť ich zložiek – výrokov. Zložité výroky vytvárame z jednoduchších (elementárnych) výrokov pomocou logických spojok. Logika študuje všeobecné formy usudzovania na symbolickej úrovni, v ktorej sa ignoruje konkrétny obsah jednotlivých tvrdení. Moderná logika je označovaná ako *formálna logika* alebo *matematická logika,* pre ktoré je charakteristické používanie symbolov a ich zgrupovania pomocou logických spojok do väčších celkov nazývaných formuly, ale aj formalizácia procesu transformácie danej formuly na inú formulu metódami, ktoré sú charakteristické pre matematiku. Výroková logika je chápaná ako špeciálny druh algebry (Boolovej), obsahujúcej premenné (výroky), unárne a binárne operácie (logické spojky) nad týmito premennými a kde taktiež existuje striktný matematický systém odvodzovania nových formúl pomocou povolených operácií z jednoduchších formúl (axióm).

VÝZNAM LOGIKY PRE INFORMATIKU

Matematická logika tvorí jeden z pilierov teoretickej informatiky, menovite moderných metód umelej inteligencie. Umožňuje jednoduchú formalizáciu prirodzeného jazyka pomocou výrokov a logických spojok, prostredníctvom zákonov usudzovania matematickej logiky umožňuje vyvodzovať deduktívnym spôsobom z takto formalizovaných poznatkov nové poznatky, ktoré neboli v pôvodnej „databáze“ explicitne obsiahnuté.

SYNTAX VÝROKOVEJ LOGIKY

Syntax výrokovej logiky je určený formálnym systémom pre konštrukciu zložitých (výrokových) formúl pomocou iných (elementárnych alebo zložitých) výrokov a logických spojok. Korektné formuly výrokovej logiky sú charakterizované syntaktickým stromom, pomocou ktorého môžeme charakterizovať danú formulu množinou podformúl. Podformula je elementárna formula alebo výroková premenná, keď neobsahuje logické spojky.

SÉMANTIKA VÝROKOVEJ LOGIKY

Sémantika výrokovej logiky špecifikuje pravdivostný význam formúl pomocou dvojhodnotových pravdivostných hodnôt ich podformúl alebo výrokových premenných. Integrálnou súčasťou sémantiky sú pravdivostné tabuľky logických spojok. Základný prístup k sémantike je založený na tabuľkovej metóde, pomocou ktorej systematickým spôsobom počítame pravdivostnú hodnotu formuly na základe všetkých možných pravdivostných hodnôt jej premenných, t. j. pre všetky možné interpretácie premenných. Tautológia je taká formula, ktorá je pravdivá pre všetky interpretácie jej premenných, t. j. v tabuľkovej metóde vo všetkých riadkoch dostávame hodnotu „pravda“. Opakom tautológie je kontradikcia, formula, ktorá je nepravdivá pre všetky interpretácie premenných. Formula je splniteľná vtedy, ak je pravdivá aspoň pre jednu interpretáciu, t. j. tautológia je špeciálny prípad pravdivý pre všetky interpretácie.

ZÁKONY VÝROKOVEJ LOGIKY

Tautológie majú mimoriadne postavenie vo výrokovej logike, alternatívne sa nazývajú zákony výrokovej logiky a sú obvykle označované aj vlastným menom. Klasická výroková logika (od staroveku až do novoveku) bola založená na týchto zákonoch, ktoré študovala ako špeciálne módy usudzovania pomocou ktorých z pravdivých predpokladov vždy získame pravdivé výsledky.

# KĽÚČOVÉ POJMY

*výroková logika*
*modus ponens*
*formálna logika*
*matematická logika*
*Aristoteles*
*filozofická logika*
*moment času v usudzovaní*
*modalita výrokov*
*dvojhodnotové logiky*
*viachodnotové logiky*
*ternárne spojky*
*výrok*
*pravdivostná hodnota*
*unárna logická spojka*
*binárna logická spojka*
*negácia*
*konjunkcia*
*disjunkcia*
*implikácia*
*ekvivalencia*
*G. Frege*
*príčinná súvislosť*
*neklasické logiky*
*syntax*
*výroková formula*
*výroková konštanta*
*výroková premenná*
*mimologické symboly*
*Backusova a Naurova forma*
*syntaktický strom formuly*
*podformula*
*sémantika*
*interpretácia premenných*
*tabuľková metóda*
*tautológia*
*De Morganove zákony*
$\models$
*zákon hypotetického sylogizmu*

# CVIČENIA

**1.1.** Prepíšte z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky:

(a) *Jano pôjde na výlet a Fero pôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.

(b) *Eva pôjde na výlet alebo Viera nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.

(c) *Ak Viera pôjde na výlet, potom Fero nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a disjunkcie a (2) vykonajte inverziu[4] pôvodnej implikácie.

(d) *Ak Viera pôjde na výlet alebo Jano pôjde na výlet, potom Fero pôjde na výlet a Eva nepôjde na výlet;* (1) vyjadrite túto vetu pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.

[4] Pod inverziou implikácie $p \Rightarrow q$ rozumieme jej prepis do ekvivalentného tvaru $\neg q \Rightarrow \neg p$

(e) *Viera na výlet pôjde a Eva na výlet nepôjde*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.

**1.2.** Negujte tieto výroky.

(a) Budem sa prechádzať alebo si budem spievať.

(b) Jano nefandí ani Slovanu ani Interu.

(c) Ak je streda, potom máme schôdzu.

(d) Ak sa budem moc učiť, tak pôjdem študovať na vysokú školu.

(e) Ak sa budem moc učiť a budem mať trochu šťastia, potom urobím skúšku z logiky.

(f)Dám ti facku, ak ma oklameš.

(g) Ak bude pekné počasie a nepokazí sa nám auto, potom pôjdeme na výlet a budeme sa kúpať.

**1.3.** Zostrojte syntaktické stromy formúl, zostrojte podformuly daných formúl:

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

(d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$

(e) $p \Rightarrow (p \wedge q)$

(f) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg (p \Rightarrow q)$

**1.4.** Prečo uvedené výrazy nie sú formuly výrokovej logiky?

(a) $((p \Rightarrow q) \wedge (\vee (q \Rightarrow r))) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

(b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \looparrowright q)$.

**1.5.** Preverte pomocou tabuľkovej metódy, ktoré formuly z cvičenia 1.3 sú tautológie, kontradikcie a splniteľné.

**1.6.** Použitím binárneho stromu z obr. 1.3 určite pre ktoré interpretácie premenných $\tau$ sú výrokové formuly splniteľné:

(a) $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow p)$,

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$.

**1.7.** Preverte pomocou tabuľkovej metódy a metódy binárneho stromu, či formule (zákony výrokovej logiky) (1-13) konca podkapitoly 1.4. sú tautológie.