ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY

Martin Knor

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE

ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY

Martin Knor

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2016

Skriptá predstavujú spísané prednášky z predmetu Matematická logika presne podľa sylabov. Za cieľ sme si kládli stručnosť a zrozumiteľnosť výkladu. Skriptá nesuplujú učebnicu, predstavujú nutné minimum potrebné na úspešné absolvovanie predmetu.

Recenzenti: prof. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc.
doc. RNDr. Marián Klešč, PhD.

prof. RNDr. Martin Knor, PhD.

ÚVOD DO MATEMATICKEJ LOGIKY

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2016.

Edícia skrípt

Rozsah 111 strán, 1. vydanie, edičné číslo 5927, vydané v elektronickej forme; umiestnenie na http://www.svf.stuba.sk

Schválila Edičná rada Fakulty informatiky a informačných technológií STU v Bratislave.

85 – 240 – 2016

ISBN 978-80-227-4656-4

Predhovor

Tento učebný text je určený študentom prvého ročníka fakulty informatiky a informačných technológií Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. Predstavuje spísané prednášky z predmetu matematická logika.

Štruktúra tohoto textu je upravená tak, že každá kapitola tvorí jednu prednášku. Čitateľovi predkladáme 11 kapitol, čo je podľa našich skúseností maximálny možný počet prednášok, ktorý sa dá stihnúť počas 13-týždňového semestra. V „zlých rokoch" sa fyzicky nestihne odprednášať ani 11 prednášok. Vtedy tento učebný text slúži študentom na samoštúdium, pretože základné vedomosti majú mať všetci študenti rovnaké, bez ohľadu na rok, v ktorom študovali.

Po obsahovej stránke možno učebnicu rozdeliť na štyri časti.

- V prvých troch kapitolách zadefinujeme formuly výrokovej logiky, objasníme si ich význam a ukážeme, ako sa odvodzujú. Ukážeme si tiež, že daným spôsobom vieme formulu odvodiť práve vtedy, keď je vždy pravdivá.
- Kapitoly 4 až 6 sú nadstavbou prvých troch. Opíšeme si ďalšie metódy, pomocou ktorých vieme zistiť, či je formula tautológia, ako aj aplikácie výrokovej logiky na spínacie a logické obvody a na neurónové siete.
- Ďalšie tri kapitoly sa zaoberajú predikátovou logikou. Tak ako pri výrokovej logike, objasníme si význam formúl predikátovej logiky a metódy ich odvodzovania. Na odvodzovanie formúl budeme používať sémantické stromy a Gentzenovský (sekventový) kalkulus.
- V posledných dvoch kapitolách sa zaoberáme netradičnými logikami. Opíšeme si základy modálnej a viachodnotovej logiky.

Chceme zdôrazniť, že tento učebný text poskytuje iba tie najzákladnejšie informácie o matematickej logike. Pre študenta, ktorý si chce vedomosti rozšíriť, odporúčame špecializované učebnice.

Predkladaný učebný text slúži nielen ako doplnok prednášky, ale aj ako sprievodný text k cvičeniam. Preto sme na koniec každej kapitoly zaradili množstvo neriešených príkladov.

Záverom tohoto úvodu chcem poďakovať recenzentom doc. RNDr. Mariánovi Kleščovi, PhD. a prof. RNDr. Ľudovítovi Nieplovi, CSc., za cenné pripomienky. Tiež chcem poďakovať Mgr. Gabriele Kubičkovej za jazykovú úpravu.

A u t o r

1 Pravdivostné tabuľky a tautológie

Čo je to výrok?

Výrok je veta, o ktorej pravdivosti má zmysel uvažovať.

Príklady výrokov:

Prší.

Fero hrá futbal.

Školník spí.

Výrokmi nie sú:

Poď sem!

Dobré ráno.

Nás však nebudú zaujímať výroky samotné, ale ich zloženiny. Napríklad:

Prší a Fero hrá futbal.
Ak prší, tak Fero nehrá futbal.

Budeme uvažovať, čo vieme povedať o pravdivosti zloženého výroku, ak poznáme pravdivostnú hodnotu častí, z ktorých sa zložený výrok skladá. Označme

A výrok „*Prší.*“
B výrok „*Fero hrá futbal.*“

Potom zložený výrok

Ak prší, tak Fero nehrá futbal

zapíšeme

$$A \Rightarrow \neg B\,.$$

Výraz $A \Rightarrow \neg B$ nazývame *výroková formula*, pričom A a B, teda základné formuly z ktorých sa výroková formula skladá, nazývame *prvotné formuly.* Výroková formula $A \Rightarrow \neg B$ nereprezentuje len jeden výrok, ale nekonečne veľa výrokov, pretože za prvotné formuly A a B môžeme dosadiť ľubovoľné výroky.

Základné logické spojky

Symbolom $\nu(A)$ budeme označovať pravdivostnú hodnotu výroku A. Táto pravdivostná hodnota je buď 0, alebo 1.

$\nu(A) = 0$ znamená, že výrok A je nepravdivý;
$\nu(A) = 1$ znamená, že výrok A je pravdivý.

Medzi základné výrokové spojky patrí negácia $\neg$, konjunkcia $\wedge$, disjunkcia $\vee$, implikácia $\Rightarrow$ a ekvivalencia $\Leftrightarrow$. Tu $\neg$ je unárna logická spojka, zatiaľ čo $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ sú binárne. Ich význam popisujú nasledujúce tabuľky.

A	$\neg A$
0	1
1	0

čítame

ak $\nu(A) = 0$, tak $\nu(\neg A) = 1$
ak $\nu(A) = 1$, tak $\nu(\neg A) = 0$

Podobný význam má aj nasledujúca tabuľka:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výrokové formuly (jazyk výrokovej logiky)

Zadefinujeme výrokové formuly nad množinou prvotných formúl.

DEFINÍCIA. **Výroková formula** s množinou prvotných formúl P vznikne ak použijeme konečne veľakrát nasledujúce pravidlá:

(a) Každá prvotná formula p z množiny P je výroková formula.
(b) Ak sú A a B výrokové formuly, tak aj $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ a $(A \Leftrightarrow B)$ sú výrokové formuly.

PRÍKLAD. $(p \Rightarrow)$ ani $\neg \Rightarrow p$ nie sú výrokové formuly, ale $((p \wedge q) \Rightarrow ((\neg p) \vee q))$ je výroková formula.

Slovíčko „výroková“ budeme kvôli stručnosti vynechávať. Teda keď bude reč o výrokoch, tak pod pojmom „formula“ budeme rozumieť výrokovú formulu.

DOHODA. Posledné vonkajšie zátvorky budeme u formúl vždy vynechávať. Teda namiesto $((A \Rightarrow B) \vee C)$ budeme písať len $(A \Rightarrow B) \vee C$.
Budeme tiež vynechávať vonkajšie zátvorky pri negáciách. Čiže namiesto správneho $((\neg A) \Rightarrow (\neg(\neg B))) \Rightarrow C$ budeme písať $(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow C$. To preto, lebo negácia má najvyššiu prioritu, čiže ak by sme mali viac možností, tak vždy aplikujeme najprv negáciu.

Teraz už môžeme povedať, čo je to výroková logika. Je to vedecká disciplína, ktorej predmetom skúmania sú výrokové formuly.

Pravdivostné ohodnotenie formúl (sémantika)

V tejto časti budeme výrokové formuly ohodnocovať.

Definícia. **Pravdivostné ohodnotenie** množiny P prvotných formúl je ľubovoľné zobrazenie ν množiny P do množiny $\{0, 1\}$ (lož, pravda). Prvotná formula p je **pravdivá** pri ohodnotení ν ak $\nu(p) = 1$. Ak $\nu(p) = 0$, tak je p **nepravdivá**.

Podľa predchádzajúcej definície pravdivostné ohodnotenie získame ak priradíme každej prvotnej formule z P jedno z čísel 0 a 1. Je zrejmé, že takto vieme zostrojiť $2^{|P|}$ rôznych pravdivostných ohodnotení množiny prvotných formúl.

V ďalšom rozšírime pravdivostné ohodnotenie z prvotných formúl na všetky formuly výrokovej logiky.

Definícia. Nech je ν ohodnotenie množiny prvotných formúl P. Symbolom $\overline{\nu}$ označíme rozšírenie ν na množinu všetkých výrokových formúl. Potom formula Q je **pravdivá pri ohodnotení** ν (respektíve $\overline{\nu}$) ak $\overline{\nu}(Q)$=1.

Na rozšírenie ν na $\overline{\nu}$ používame pravdivostné tabuľky. Tieto tabuľky sme mali uvedené už pri objasnení významu základných logických spojok. Postup si ukážeme na príklade.

Príklad. Uvažujte formulu $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((C \Rightarrow B) \vee \neg A)$. Určte, pri akom ohodnotení prvotných formúl A, B a C má táto formula pravdivostnú hodnotu 1, čiže kedy je pravdivá.

Označme si podformulu $(A \wedge B) \Rightarrow C$ symbolom Q, ďalej označme podformulu $(C \Rightarrow B) \vee \neg A$ symbolom R a celú formulu symbolom S. V nasledujúcej tabuľke máme všetkých 8 možností ohodnotenia prvotných formúl A, B a C a v stĺpci S máme výsledné pravdivostné ohodnotenie zadanej formuly.

A	B	C	$A \wedge B$	Q	$C \Rightarrow B$	$\neg A$	R	S
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1

Zistili sme, že ak $\nu(A) = \nu(C) = 1$ a $\nu(B) = 0$, respektíve ak $\nu(A) = \nu(B) = 1$ a $\nu(C) = 0$, tak je formula S nepravdivá. Vo všetkých ostatných prípadoch je pravdivá.

Tautológie

Definícia.

(1) Formula A je **tautológia**, ak je jej pravdivostná hodnota 1 pre každé ohodnotenie prvotných formúl. Skutočnosť, že je A tautológia, zapisujeme $\models A$.

Naopak, ak A nie je tautológia, píšeme $\not\models A$.

(2) Formula A je **kontradikcia**, ak je jej pravdivostná hodnota 0 pre každé ohodnotenie prvotných formúl.

(3) Formula A je **splniteľná**, ak existuje ohodnotenie prvotných formúl ν také, že $\overline{\nu}(A) = 1$.

Jednoduchý príklad tautológie je $A \vee \neg A$, príklad kontradikcie je $A \wedge \neg A$ a príklad splniteľnej formuly je ľubovoľná tautológia, alebo hoci $A \Rightarrow B$.

Poznámka. Všimnime si, že ak $\not\models A$, tak A ešte nemusí byť kontradikcia.

Tautológie sú veľmi dôležité formuly práve preto, že sú pravdivé bez ohľadu na ohodnotenie prvotných formúl. Na tomto mieste zdôraznime, že na zistenie, či formula je, alebo nie je tautológia, používame pravdivostné tabuľky.

Definícia. Formuly A a B nazývame **ekvivalentnými**, ak nie sú od seba odlíšiteľné pomocou žiadneho ohodnotenia prvotných formúl, teda ak pre ľubovoľné pravdivostné ohodnotenie ν platí $\overline{\nu}(A) = \overline{\nu}(B)$. Všimnime si, že ak sú A a B ekvivalentné, tak je $A \Leftrightarrow B$ tautológiou, čiže $\models A \Leftrightarrow B$.

Príklad. Ukážte, že $\neg(A \vee B)$ a $\neg A \wedge \neg B$ sú ekvivalentné formuly.

Podľa definície potrebujeme pre každé ohodnotenie ν prvotných formúl A a B ukázať, že $\overline{\nu}(\neg(A \vee B)) = \overline{\nu}(\neg A \wedge \neg B)$. Takže použijeme pravdivostnú tabuľku.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Ako vidno z tabuľky, $\overline{\nu}(\neg(A \vee B)) = \overline{\nu}(\neg A \wedge \neg B)$ pre každé ohodnotenie ν prvotných formúl A a B, čiže $\neg(A \vee B)$ a $\neg A \wedge \neg B$ sú ozaj ekvivalentné formuly.

Podobne sa dá ukázať, že sú ekvivalentné formuly $\neg(A \wedge B)$ a $\neg A \vee \neg B$. Ekvivalencie $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ a $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ nazývame *de Morganove pravidlá.*

Booleove funkcie

Čo vlastne zapisujeme do pravdivostných tabuliek? Logické spojky (symboly $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$) sú funkcie, ktoré nadobúdajú hodnotu 0, alebo 1, podľa pravdivostnej hodnoty argumentov.

Definícia. **Booleova funkcia** (respektíve **logická funkcia**) n **argumentov** je zobrazenie $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

POZNÁMKA. $\neg$ je Booleova funkcia jedného argumentu, zatiaľ čo $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ sú Booleove funkcie dvoch argumentov.

Booleove funkcie môžeme opäť zadať pomocou pravdivostných tabuliek. Ako príklad uvádzame funkcie Nor a Nand. Funkcia Nor je takzvaná Peirceova funkcia a Nand je Shefferova funkcia. Namiesto Nor sa niekedy píše $\downarrow$ a namiesto Nand sa píše $\uparrow$.

A	B	A Nor B	A Nand B
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Zjavne existujú $2^{2^1} = 4$ Booleove funkcie jedného argumentu, $2^{2^2} = 16$ Booleových funkcií dvoch argumentov, $2^{2^3} = 256$ Booleovych funkcií troch argumentov atď.

Disjunktívny normálny tvar

DEFINÍCIA. Výroková formula je v **disjunktívnom normálnom tvare**, ak je disjunkciou niekoľkých formúl (disjunktov), o ktorých platí:

(a) Každá je konjunkciou konečne veľa prvotných formúl, prípadne ich negácií.
(b) V žiadnej sa nevyskytuje súčasne prvotná formula aj jej negácia.
(c) Ak sa naviac v každej formule vyskytujú všetky prvotné formuly, potom je formula v **úplnom disjunktívnom normálnom tvare**.

PRÍKLAD 1.1. Majme formulu f s množinou prvotných formúl $\{a, b, c\}$, ktorá je zadaná nasledujúcou pravdivostnou tabuľkou:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Zostrojte formulu v disjunktívnom normálnom tvare ekvivalentnú s f.

Formulu v disjunktívnom normálnom tvare ekvivalentnú s f zostrojíme pomocou tých riadkov tabuľky, v ktorých f nadobúda hodnotu 1. Dostávame, že f je ekvivalentná s formulou

$$(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)\,.$$

Postup z Príkladu 1.1 teraz zovšeobecníme.

DOHODA. Budeme používať skrátený zápis $\bigvee_{i=1}^{n} T_i$ pre $T_1 \vee T_2 \vee \cdots \vee T_n$ a zápis $\bigwedge_{i=1}^{n} T_i$ pre $T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_n$.

VETA 1.1. *Každá výroková formula, ktorá nie je kontradikcia, je ekvivalentná s formulou v úplnom disjunktívnom normálnom tvare.*

DÔKAZ. Budeme postupovať tak, ako v Príklade 1.1. Nech je A formula výrokovej logiky, v ktorej vystupujú len prvotné formuly $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Zostrojme pravdivostnú tabuľku pre A v závislosti od ohodnotenia $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Booleovu funkciu popísanú touto tabuľkou označme $f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pričom argument x_i zodpovedá prvotnej formule p_i. Teda $x_i = 1$ ak $\nu(p_i) = 1$ a $x_i = 0$ ak $\nu(p_i) = 0$.

Teraz pre $x_i \in \{0, 1\}$ definujme

$$p_i^{x_i} = \begin{cases} p_i & \text{ak} \quad x_i = 1, \\ \neg p_i & \text{ak} \quad x_i = 0. \end{cases}$$

Potom pre ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných ν platí

$$\overline{\nu}(p_i^{x_i}) = 1 \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \nu(p_i) = x_i. \tag{1}$$

Totiž:

– ak $x_i = 1$, tak (1) tvrdí: $\overline{\nu}(p_i) = 1$ práve vtedy, keď $\nu(p_i) = 1$;
– ak $x_i = 0$, tak (1) tvrdí: $\overline{\nu}(\neg p_i) = 1$ práve vtedy, keď $\nu(p_i) = 0$.

Je zrejmé, že tieto tvrdenia (pre $x_i = 1$, aj $x_i = 0$) sú pravdivé, preto (1) platí.

V ďalšom dokážeme, že

$$B = \bigvee_{\substack{\text{cez } x_1,\ldots,x_n \text{ kde} \\ f_A(x_1,\ldots,x_n)=1}} (p_1^{x_1} \wedge p_2^{x_2} \wedge \ldots \wedge p_n^{x_n})$$

je hľadané vyjadrenie f_A v úplnom disjunktívnom normálnom tvare. (Disjunkcia ide cez všetky tie ohodnotenia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ výrokových premenných, pre ktoré $f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.)

Ak $\overline{\nu}(A) = 1$, tak $f_A(\nu(p_1), \nu(p_2), \ldots, \nu(p_n)) = 1$ a jeden z disjunktov z B má tvar $p_1^{\nu(p_1)} \wedge p_2^{\nu(p_2)} \wedge \ldots \wedge p_n^{\nu(p_n)}$. Potom pre $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $\overline{\nu}(p_i^{\nu(p_i)}) = 1$ podľa (1). Preto $\overline{\nu}(p_1^{\nu(p_1)} \wedge p_2^{\nu(p_2)} \wedge \ldots \wedge p_n^{\nu(p_n)}) = 1$ a aj $\overline{\nu}(B) = 1$.

Naopak, ak $\overline{\nu}(B) = 1$, tak $\overline{\nu}(p_1^{x_1} \wedge p_2^{x_2} \wedge \ldots \wedge p_n^{x_n}) = 1$ platí pre aspoň jeden disjunkt z B a pre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z tohoto disjunktu potom $f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Keďže $\overline{\nu}(p_1^{x_1} \wedge p_2^{x_2} \wedge \ldots \wedge p_n^{x_n}) = 1$, tak $\overline{\nu}(p_i^{x_i}) = 1$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a z toho podľa (1) plynie, že $\nu(p_i) = x_i$ pre všetky i. Preto $f_A(\nu(p_1), \nu(p_2), \ldots, \nu(p_n)) = 1$, čiže $\overline{\nu}(A) = 1$. $\square$

Kde sme v dôkaze využili predpoklad, že A nie je kontradikcia?

Konjunktívny normálny tvar

Definícia. Výroková formula je v **konjunktívnom normálnom tvare**, ak je konjunkciou niekoľkých formúl, o ktorých platí:

(a) Každá je disjunkciou konečne veľa prvotných formúl, prípadne ich negácií.
(b) V žiadnej sa nevyskytuje súčasne prvotná formula aj jej negácia.
(c) Ak sa naviac v každej formule vyskytujú všetky prvotné formuly, potom je formula v **úplnom konjunktívnom normálnom tvare**.

Keďže sú $\neg(A \vee B)$ a $\neg A \wedge \neg B$ ekvivalentné formuly, a podobne sú ekvivalentné aj $\neg(A \wedge B)$ a $\neg A \vee \neg B$, tak platí

$$\neg\left(\bigvee_{i\in I}\left(\bigwedge_{j\in J} A_{i,j}\right)\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in I}\neg\left(\bigwedge_{j\in J} A_{i,j}\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in I}\left(\bigvee_{j\in J}\neg A_{i,j}\right).$$

Preto platí nasledujúci dôsledok Vety 1.1:

Dôsledok. *Každá výroková formula, ktorá nie je tautológiou, je ekvivalentná s formulou v konjunktívnom normálnom tvare.*

Úvahy pred dôsledkom dávajú návod na to, ako vytvoriť formulu v konjunktívnom normálnom tvare pre danú výrokovú formulu A. Najprv vytvoríme formulu v disjunktívnom normálnom tvare ekvivalentnú s $\neg A$ a túto potom znegovaním prevedieme na formulu v konjunktívnom normálnom tvare ekvivalentnú s A.

Ak máme Booleovu funkciu zadanú tabuľkou ako v Príklade 1.1, tak formulu v konkunktívnom normálnom tvare reprezentujúcu túto funkciu vieme zostrojiť priamo. Stačí sa zamerať na tie ohodnotenia prvotných premenných, pri ktorých nadobúda funkcia hodnotu 0. Dostávame, že formula $f(a, b, c)$ z Príkladu 1.1 je ekvivalentná s formulou (pozri de Morganove pravidlá):

$$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c).$$

Funkčne úplné množiny spojok

V tejto kapitole sme zaviedli logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, Nand a Nor. Keby sme chceli využiť minimalistický prístup, zrejme by sme si vystačili aj s menším množstvom spojok.

Definícia. Nech je S množina logických spojok. Ak k ľubovoľnej formule A možno nájsť takú formulu ekvivalentnú s A, ktorá využíva len spojky z S a prvotné formuly vyskytujúce sa v A, tak S je **funkčne úplná množina logických spojok**.

Ako sme ukázali vo Vete 1.1 a jej dôsledku, $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je funkčne úplná množina logických spojok. Avšak funkčne úplné množiny logických spojok sú aj množiny $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$, $\{\,\mathsf{Nor}\,\}$, $\{\,\mathsf{Nand}\,\}$ a podobne.

Cvičenia

CVIČENIE 1.1. Sformulujte výroky, ktoré možno reprezentovať nasledujúcimi výrokovými formulami:

a) $\neg A \vee B$ b) $(A \wedge B) \Rightarrow C$
c) $A \Leftrightarrow \neg B$ d) $(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$

CVIČENIE 1.2. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú tautológie:

a) $\models A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ b) $\models (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
c) $\models (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$

CVIČENIE 1.3. Pomocou ohodnotení ν ukážte, že ak platí $\models A$ a $\models A \Rightarrow B$, tak platí $\models B$.

CVIČENIE 1.4. Pomocou pravdivostných tabuliek dokážte:

a) $\models A \Rightarrow A$ b) $\models \neg A \Rightarrow \neg A$
c) $\models A \vee \neg A$ d) $\models \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
e) $\models \neg\neg A \Rightarrow A$ f) $\models A \Rightarrow \neg\neg A$
g) $\models (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ h) $\models (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$
i) $\models (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ j) $\models (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
k) $\models (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ l) $\models A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
m) $\models B \Rightarrow (A \vee B)$ n) $\models A \Rightarrow (A \vee B)$
o) $\models (A \wedge B) \Rightarrow B$ p) $\models (A \wedge B) \Rightarrow A$
q) $\models (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ r) $\models (A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$
s) $\models A \Rightarrow (A \wedge A)$ t) $\models \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
u) $\models (A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow A$ v) $\models A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$
w) $\models ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ x) $\models (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
y*) $\models (\ldots((\underbrace{A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow A}_{2k\ A\text{-čiek}}$ z*) $\models (\ldots((\neg A \Rightarrow \underbrace{A) \Rightarrow A) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow A}_{2k\ A\text{-čiek}}$

CVIČENIE 1.5. Pomocou pravdivostných tabuliek dokážte:

a) $\models A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$ b) $\models ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
c) $\models (A \vee (B \vee C)) \Rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$
d) $\models ((B \vee (A \vee C)) \vee A) \Rightarrow (A \vee (B \vee C))$

CVIČENIE 1.6. Zostrojte formulu v disjunktívnom normálnom tvare ekvivalentnú s formulou:

a) $A \Rightarrow B$ b) $A \Leftrightarrow B$
c) $\neg(A \Rightarrow \neg B)$ d) $\neg A \Rightarrow B$
e) $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ f) $((A \vee \neg B) \Rightarrow (C \vee B)) \vee (A \vee C)$

CVIČENIE 1.7. Zostrojte formulu v konjunktívnom normálnom tvare ekvivalentnú s formulou:

a) $A \Rightarrow B$ b) $A \Leftrightarrow B$
c) $A \wedge (B \Rightarrow C)$ d) $B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
e) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg C)$ f) $(A \Leftrightarrow \neg C) \Rightarrow (B \vee (C \Rightarrow \neg A))$

Cvičenie 1.8. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú tautológie:

a) $\models (A \,\mathsf{Nor}\, A) \Leftrightarrow \neg A$

b) $\models (A \,\mathsf{Nand}\, A) \Leftrightarrow \neg A$

Cvičenie 1.9. Dokážte, že nasledujúce množiny logických spojok sú úplné:

a) $\neg$, $\vee$

b) $\neg$, $\wedge$

c) $\neg$, $\Rightarrow$

d) Nor

e) Nand

Cvičenie 1.10. Dokážte, že nasledujúce množiny logických spojok nie sú úplné:

a) $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

b*) $\neg$, $\Leftrightarrow$

2 Formálny systém výrokovej logiky

V predchádzajúcej časti sme si ukázali, ako sa dá pomocou pravdivostných tabuliek zistiť, či je výroková formula vždy pravdivá, teda či je tautológia. V tejto časti budeme výrokové formuly odvodzovať (čiže dokazovať) z troch axióm pomocou jedného jediného odvodzovacieho pravidla.

Formálny systém výrokovej logiky

Začneme tým, že si jazyk výrokovej logiky trochu zjednodušíme.

Definícia. **Základné výrokové spojky** sú $\neg$ a $\Rightarrow$, pričom ostatné spojky, ako napríklad $\wedge$, $\vee$ a $\Leftrightarrow$ sú **odvodené výrokové spojky**. Teda:

(a) $A \wedge B$ je iba skrátený zápis formuly $\neg(A{\Rightarrow}\neg B)$;
(b) $A \vee B$ je skrátený zápis formuly $\neg A \Rightarrow B$;
(c) $A \Leftrightarrow B$ je skrátený zápis $(A{\Rightarrow}B) \wedge (B{\Rightarrow}A)$, čiže $\neg((A{\Rightarrow}B){\Rightarrow}\neg(B{\Rightarrow}A))$.

Definícia. **Formálny systém výrokovej logiky** tvoria:

- **Jazyk výrokovej logiky**, ktorý pozostáva z množiny prvotných formúl, symbolov pre logické spojky $\neg$ a $\Rightarrow$ a zátvoriek (a).
- **Axiómy**. Nech sú A, B a C ľubovoľné formuly. Potom axiómami sú
  A1: $A \Rightarrow (B{\Rightarrow}A)$
  A2: $(A{\Rightarrow}(B{\Rightarrow}C)) \Rightarrow ((A{\Rightarrow}B) \Rightarrow (A{\Rightarrow}C))$
  A3: $(\neg A{\Rightarrow}\neg B) \Rightarrow ((\neg A{\Rightarrow}B){\Rightarrow}A)$
- **Odvodzovacie pravidlo** je jediné a volá sa **modus ponens**. Tvrdí:
  Z formúl A a $A{\Rightarrow}B$ odvoď formulu B.

Z Cvičenia 1.2 už vieme, že A1, A2 a A3 sú tautológie. Podľa Cvičenia 1.3 je modus ponens (MP) korektné pravidlo. Teda práve opísaným spôsobom by sa mali dať odvodiť len tautológie.

Poznamenajme, že existujú aj iné, ekvivalentné systémy axióm. My však budeme používať axiómy A1, A2 a A3 uvedené vyššie.

Dôkaz

Definícia. Konečná postupnosť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je **dôkazom** (**odvodením**) **formuly** A, ak platí:

(a) A_n je práve A;

(b) pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je A_i buď axióma tvaru A1, A2, prípadne A3, alebo je A_i modus ponens A_j a A_k, kde $j, k < i$.

Ak existuje dôkaz formuly A, tak A je **dokázateľná** (**odvoditeľná**) **vo výrokovej logike**, čo zapisujeme $\vdash A$. Naopak, $\nvdash A$ znamená, že A nie je dokázateľná ($\nvdash A$ je vlastne len skrátený zápis tvrdenia $\neg(\vdash A)$).

Kvôli lepšej prehľadnosti dôkazu budeme formuly, ktoré sa v ňom vyskytli, číslovať na ľavej strane, zatiaľ čo na pravú stranu vždy zaznačíme, ako príslušná formula vznikla. Postup si ukážeme na jednej z najjednoduchších výrokových formúl.

Lema 2.1. *Platí* $\vdash A \Rightarrow A$.

Dôkaz.

1:	$(A\Rightarrow((A\Rightarrow A)\Rightarrow A)) \Rightarrow ((A\Rightarrow(A\Rightarrow A)) \Rightarrow (A\Rightarrow A)))$	A2
2:	$A \Rightarrow ((A\Rightarrow A)\Rightarrow A)$	A1
3:	$(A\Rightarrow(A\Rightarrow A)) \Rightarrow (A\Rightarrow A)$	MP(2,1)
4:	$A\Rightarrow(A\Rightarrow A)$	A1
5:	$A\Rightarrow A$	MP(4,3) □

Dôsledkom Lemy 2.1 je **zákon vylúčenia tretieho**: $\vdash A \vee \neg A$ (čo je len iný zápis formuly $\vdash \neg A \Rightarrow \neg A$).

Dôkaz s využitím predpokladov

Niektoré formuly, ktoré nie sú vždy pravdivé, sa môžu stať pravdivými za určitých predpokladov. Kvôli tomu potrebujeme pojem dôkazu trochu rozšíriť.

Definícia. Nech je T množina výrokových formúl. Postupnosť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je **dôkazom formuly** A **z predpokladov** T, ak platí:

(a) A_n je práve A;

(b) pre ľubovoľné $i = 1, 2, \ldots, n$ je A_i buď axióma, alebo je prvkom z T, alebo je modus ponens dvoch formúl z $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$.

Formula A je **dokázateľná z predpokladov** T, ak existuje dôkaz A z T, čo zapisujeme $T \vdash A$.

Kvôli lepšej prehľadnosti budeme i-ty riadok dôkazu zapisovať tak, že pred formulu vsunieme symbol $\vdash$ a ešte pred tento symbol uvedieme všetky predpoklady, ktoré sme využili pri odvodení tejto formuly. Z tohoto pravidla budeme robiť jedinú výnimku. V prípade, že A je predpoklad, budeme písať jednoducho A namiesto korektného $A \vdash A$.

Postup si ukážeme na pravidle sylogizmu a vete o zámene predpokladov.

LEMA 2.2. *Pre ľubovoľné formuly A, B, C platí* **pravidlo sylogizmu**, *teda* $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.

DÔKAZ.

1:	$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	A2
2:	$\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$	A1
3:	$B \Rightarrow C$	predpoklad
4:	$B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	MP(3,2)
5:	$B \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	MP(4,1)
6:	$A \Rightarrow B$	predpoklad
7:	$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$	MP(6,5) □

LEMA 2.3 (**o zámene predpokladov**). *Pre ľubovoľné formuly A, B a C platí* $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

DÔKAZ.

1:	$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	A2
2:	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	predpoklad
3:	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	MP(2,1)
4:	$\vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	A1
5:	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Syl(4,3) □

Veta o dedukcii

Jedným z najsilnejších tvrdení výrokovej logiky je veta o dedukcii.

VETA 2.4 (**o dedukcii**). *Nech sú A a B formuly a nech je T množina formúl. Potom* $T \vdash A \Rightarrow B$ *práve vtedy, keď* $T \cup \{A\} \vdash B$.

DÔKAZ. Nech platí $T \vdash A \Rightarrow B$ a nech je $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dôkazom $A \Rightarrow B$ z T. Potom $C_1, C_2, \ldots, C_n, A, B$ je dôkazom B z $T \cup \{A\}$, lebo C_n je práve $A \Rightarrow B$, A je z $T \cup \{A\}$ a B je modus ponens formúl C_n a A.

Naopak, nech platí $T \cup \{A\} \vdash B$ a nech je $D_1, D_2, \ldots, D_m$ dôkazom B z $T \cup \{A\}$. Ukážeme, že pre každé $i = 1, 2, \ldots, m$ je $A \Rightarrow D_i$ dokázateľné z T. Postupujeme indukciou podľa i:

1° Pre $i = 1$ môžu nastať tri prípady:

(a) D_1 je axióma. Potom:

$1'$:	$\vdash D_1 \Rightarrow (A \Rightarrow D_1)$	A1
$2'$:	$\vdash D_1$	axióma
$3'$:	$\vdash A \Rightarrow D_1$	MP$(2', 1')$

(b) D_1 je z T. Potom:

$1'$:	$\vdash D_1 \Rightarrow (A \Rightarrow D_1)$	A1
$2'$:	$T \vdash D_1$	predpoklad
$3'$:	$T \vdash A \Rightarrow D_1$	MP$(2', 1')$

(c) D_1 je práve A. Potom podľa Lemy 2.1 $\vdash A \Rightarrow D_1$.

2° Nech tvrdenie $T \vdash A \Rightarrow D_i$ platí pre všetky $i = 1, \ldots, j-1$ $(j \leq m)$. Dokážeme, že platí aj $T \vdash A \Rightarrow D_j$.

Prípady (a), (b) a (c) sme už rozobrali v prvom kroku indukcie. Avšak ak $j > 1$, môže nastať ešte jeden prípad, ktorý je potrebné rozobrať. Môže sa stať, že D_j je modus ponens formúl D_k a D_l, kde $k, l < j$. Potom však D_l má tvar $D_k \Rightarrow D_j$. Využijúc indukčný predpoklad (IP) dostávame:

$1'$:	$T \vdash A \Rightarrow D_k$	IP
$2'$:	$T \vdash A \Rightarrow (D_k \Rightarrow D_j)$	IP
$3'$:	$\vdash (A \Rightarrow (D_k \Rightarrow D_j)) \Rightarrow ((A \Rightarrow D_k) \Rightarrow (A \Rightarrow D_j))$	A2
$4'$:	$T \vdash (A \Rightarrow D_k) \Rightarrow (A \Rightarrow D_j)$	MP$(2', 3')$
$5'$:	$T \vdash A \Rightarrow D_j$	MP$(1', 4')$ □

Všimnime si, že Lemy 2.2, 2.3 a Veta 2.4 nám dávaju nové odvodzovacie pravidlá. V ďalšom teda môžeme okrem modus ponens využívať aj sylogizmus, vetu o zámene predpokladov a vetu o dedukcii. Modus ponens označujeme skrátene MP s číslami príslušných formúl v dôkaze. Podobne budeme používať skratky Syl(4,3) (sylogizmus štvrtej a tretej formuly); VZP(3) (veta o zámene predpokladov na tretiu formulu) a VD(7) (veta o dedukcii na siedmu formulu).

Avšak v ďalšom budeme využívať nielen tieto tri pomenované tvrdenia, ale ľubovoľnú už dokázanú formulu.

Poznámka. Ak by sme chceli byť presní v zmysle našej definície dôkazu, tak všade, kde sa odvolávame na pomocné tvrdenia, mali by sme vsunúť celé dôkazy týchto tvrdení. Toto kvôli lepšej prehľadnosti (ako aj preto, aby sme nedokazovali veľakrát rovnaké tvrdenia) nerobíme.

Dôkazy s využitím axiómy A3

V predchádzajúcich dôkazoch sme ani raz nevyužili axiómu A3. V tejto podkapitole ju využijeme. Naopak, keďže máme vetu o dedukcii, axiómu A2 už nebudeme potrebovať.

Lema 2.5. $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

Dôkaz.

1:	$\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$	A3
2:	$\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	A1
3:	$\neg A \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$	VD(2)
4:	$\neg A \vdash (\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B$	MP(3,1)
5:	$\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$	A1
6:	$A \vdash \neg B \Rightarrow A$	VD(5)
7:	$\neg A,\ A \vdash B$	MP(6,4)
8:	$\neg A \vdash A \Rightarrow B$	VD(7)
9:	$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	VD(8) □

Lema 2.6. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$.

Dôkaz.

1:	$\vdash (\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A)$	A3
2:	$\vdash \neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg A)$	A1
3:	$\neg\neg A \vdash \neg A \Rightarrow \neg\neg A$	VD(2)
4:	$\neg\neg A \vdash (\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A$	MP(3,1)
5:	$\vdash \neg A \Rightarrow \neg A$	Lema 2.1
6:	$\neg\neg A \vdash \ A$	MP(5,4)
7:	$\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$	VD(6) □

Lema 2.7. $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$.

Dôkaz.

1:	$\vdash (\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg A)$	A3
2:	$\vdash \neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$	Lema 2.6
3:	$\vdash (\neg\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg A$	MP(2,1)
4:	$\vdash A \Rightarrow (\neg\neg\neg A \Rightarrow A)$	A1
5:	$\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$	Syl(4,3) □

Predchádzajúce tri dôkazy mali spoločnú stratégiu, ktorá spočívala vo vhodnej aplikácii axiómy A3. Približne povedané, zvolili sme taký koniec A3, ktorý sa zhodoval s koncom dokazovanej formuly X. (Na konci A3 máme formulu A. V Leme 2.5 sme preto volili za A formulu B, v Lemme 2.6 A a v Lemme 2.7 formulu $\neg\neg A$.) Potom prvé podformuly X slúžili ako predpoklady, z ktorých sme sa snažili odvodiť prvé podformuly A3. V závere sme použili vetu o dedukcii.

Veta 2.8 (**vety o obrátenej implikácii**). *Platia nasledujúce tvrdenia:*

a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *b)* $\vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$
c) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ *d)* $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Dôkazy si urobte ako jednoduché cvičenie. Pri dôkaze c) a d) stačí využiť A1, A3 a Vetu o dedukcii, pri dôkaze a) a b) ešte Lemu 2.6. Symbolom VOOI v ďalšom označujeme ľubovoľnú z viet o obrátenej implikácii.

Dôkazy ďalších základných tvrdení

Tu si odvodíme (dokážeme) niektoré ďalšie formuly, ktoré budeme potrebovať v nasledujúcej kapitole.

Lema 2.9. $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$.

Dôkaz.

1:	A	predpoklad
2:	$A \Rightarrow B$	predpoklad
3:	$A,\ A \Rightarrow B \vdash B$	MP(1,2)
4:	$A \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$	VD(3)
5:	$\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$	VOOI
6:	$A \vdash \neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$	MP(4,5)
7:	$\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$	VD(6) □

Veta 2.10 (**o neutrálnej formule**). *Ak* $T \cup \{A\} \vdash B$ *a* $T \cup \{\neg A\} \vdash B$*, tak* $T \vdash B$.

Dôkaz.

1:	$T \cup \{A\} \vdash B$	predpoklad
2:	$T \vdash A \Rightarrow B$	VD(1)
3:	$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	VOOI
4:	$T \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$	MP(2,3)
5:	$T \cup \{\neg A\} \vdash B$	predpoklad
6:	$T \vdash \neg A \Rightarrow B$	VD(5)
7:	$\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$	VOOI
8:	$T \vdash \neg B \Rightarrow A$	MP(6,7)
9:	$\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$	A3
10:	$T \vdash (\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B$	MP(4,9)
11:	$T \vdash B$	MP(8,10) □

Lema 2.11. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$.

Dôkaz.

1:	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	predpoklad
2:	$\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$	VOOI
3:	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$	Syl(1,2)
4:	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash \neg C \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$	VZP(3)
5:	$\vdash (\neg C \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C)$	VOOI
6:	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash \neg (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C$	MP(4,5)
$6'$:	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$	□

Lema 2.12. $(A \wedge B) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

Dôkaz.

1:	$\vdash A \Rightarrow (\neg\neg B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow \neg B))$	Lema 2.9
2:	$A \vdash \neg\neg B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow \neg B)$	VD(1)
3:	$\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$	Lema 2.7
4:	$A \vdash B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow \neg B)$	Syl(3,2)
5:	$\neg (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C$	predpoklad
6:	$\neg (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C,\ A \vdash B \Rightarrow C$	Syl(4,5)
7:	$\neg (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	VD(6)
$7'$:	$(A \wedge B) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	□

V nasledujúcej vete máme formulu $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n)$, čo je iba skrátený zápis formuly $((\ldots((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n)$.

Veta 2.13. *Nech sú* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *a* B *výrokové formuly. Potom tvrdenie* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B$ *platí práve vtedy, keď platí* $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$.

Dôkaz. Vetu dokážeme indukciou podľa n.
1° Ak $n = 1$, potom $A_1 \vdash B$ práve vtedy, keď $\vdash A_1 \Rightarrow B$, podľa vety o dedukcii.
2° Nech tvrdenie vety platí pre všetky $i < n$, dokážeme jeho platnosť pre n. Nech

$1'$: $\{A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \vdash B$	predpoklad
$2'$: $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \vdash A_n \Rightarrow B$	VD($1'$)
$3'$: $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \Rightarrow (A_n \Rightarrow B)$	IP
$4'$: $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \Rightarrow (A_n \Rightarrow B) \vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \Rightarrow B$	Lemma 2.11
$5'$: $\vdash ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \Rightarrow (A_n \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \Rightarrow B)$	VD($5'$)
$6'$: $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \Rightarrow B$	MP($3'$,$5'$)

Naopak, nech

$1'$: $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \Rightarrow B$	predpoklad
$2'$: $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \Rightarrow B \vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \Rightarrow (A_n \Rightarrow B)$	Lemma 2.12
$3'$: $\vdash ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \Rightarrow B) \Rightarrow ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \Rightarrow (A_n \Rightarrow B))$	VD($2'$)
$4'$: $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \Rightarrow (A_n \Rightarrow B)$	MP($1'$,$3'$)
$5'$: $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \vdash A_n \Rightarrow B$	IP
$6'$: $\{A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \vdash B$	VD$5'$ $\square$

Pravidlo nahradenia ekvivalentných formúl

V nasledujúcich cvičeniach máme množstvo formúl, ktoré treba dokázať (odvodiť). V dôkazoch môžete využívať pravidlo nahradenia ekvivalentných formúl, ktoré sme síce nedokázali, avšak jeho dôkaz sa dá spraviť podobným spôsobom ako sa dokázala veta o dedukcii, či Veta 2.13.

Veta 2.14 (**pravidlo nahradenia ekvivalentných formúl**). *Nech platí tvrdenie $T \vdash A$ a nech sú formuly P a Q navzájom ekvivalentné. To znamená, že platí $\vdash P \Rightarrow Q$ aj $\vdash Q \Rightarrow P$. Nahraďme niektoré podformuly P v $T \cup \{A\}$ formulou Q a označme modifikovanú množinu predpokladov symbolom T' a modifikovanú formulu A symbolom A'. Potom platí $T' \vdash A'$.*

Vo Vetách 2.6 a 2.7 sme dokázali $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$ a $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$. Vieme teda, že A a $\neg\neg A$ sú navzájom ekvivalentné formuly a ľubovoľný výskyt formuly A môžeme nahradiť formulou $\neg\neg A$ a naopak. Ďalšie dvojice ekvivalentných formúl tvoria podľa vety o obrátenej implikácii formuly $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$, ďalej formuly $A \Rightarrow \neg B$ a $B \Rightarrow \neg A$, ako aj formuly $\neg A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow A$. Vo všetkých týchto prípadoch môžeme využiť pravidlo nahradenia ekvivalentných formúl, ale v žiadnych iných, pretože pre iné dvojice P a Q sme nedokázali $\vdash P \Rightarrow Q$ a zároveň $\vdash Q \Rightarrow P$.

Cvičenia

Cvičenie 2.1. Prezrite si nasledujúci dôkaz a nájdite v ňom chybu. Vzápätí ho opravte.

Pre súčet geometrického radu s prvým členom 1 *a kvocientom q platí:*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}\,.$$

Dôkaz: Nech tvrdenie platí pre n, dokážeme ho pre $n+1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+2} - q}{q - 1}. \quad \square$$

Cvičenie 2.2. Prezrite si nasledujúci dôkaz a nájdite v ňom chybu.

Každá n-tica reálnych čísel obsahuje len rovnaké čísla.

Dôkaz (matematickou indukciou). Označme danú n-ticu $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1° Pre $n = 1$ vlastne niet čo dokazovať, lebo zjavne $a_1 = a_1$.

2° Nech tvrdenie platí pre n, dokážeme ho pre $n+1$. Majme teda $(n+1)$-ticu $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Podľa indukčného predpokladu platí $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ a rovnako tak $a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$. Preto platí aj $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$.

Cvičenie 2.3. Preštudujte si nasledujúci dôkaz.

Prvočísel je nekonečne veľa.

Dôkaz sporom: Predpokladajme, že platí negácia tvrdenia, teda nech je prvočísel len konečne veľa. Označme si ich $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Potom každé prirodzené číslo q možno zapísať v tvare $q = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ (niektoré z čísel α_i môžu byť aj nuly).

Čo viete povedať o čísle $p = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$? Zrejme p nie je deliteľné žiadnym z čísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$. To však znamená, že $p = p_1^0 \cdot p_2^0 \cdot \ldots \cdot p_n^0 = 1$, čo je spor s tým, že $p \geq 3$, keďže 2 je istotne prvočíslo. $\square$

Všimli ste si, že sme v tomto dôkaze využili Lemu 2.1, teda zákon vylúčenia tretieho? Takýto dôkaz je vo výrokovej logike korektný, avšak v bežnom živote sa toto nemusí prijímať. Napríklad ak nie je pravda, že politik v parlamente klame, tak nemusí byť pravdivé tvrdenie, že neklame. Ešte môže čiastočne klamať a čiastočne hovoriť pravdu, respektíve môže hovoriť tak, že nikto nepochopí, čo chcel povedať (a teda pravdivosť jeho tvrdenia nedokážeme overiť).

Cvičenie 2.4. S použitím vety o dedukcii odvoďte pravidlo sylogizmu a vetu o zámene predpokladov.

Cvičenie 2.5. Dokážte vety o obrátenej implikácii:

a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ b) $\vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$

c) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ d) $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Cvičenie 2.6. S použitím vety o dedukcii odvoďte nasledujúce tvrdenia:

a) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ b) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$

c) $\vdash B \Rightarrow (A \vee B)$ d) $\vdash A \Rightarrow (A \vee B)$

e) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow B$ f) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow A$

g) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ h) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$

i) $\vdash A \Rightarrow (A \wedge A)$ j) $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

k) $\vdash (A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow A$

l) $\vdash A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$

m) $\vdash ((A{\Rightarrow}A){\Rightarrow}A){\Rightarrow}A$

n) $\vdash (\neg A{\Rightarrow}A) \Rightarrow A$

o) $\vdash (\ldots((\underbrace{A{\Rightarrow}A){\Rightarrow}A){\Rightarrow}\ldots){\Rightarrow}A}_{2k\ A\text{-čiek}}$

p) $\vdash (\ldots((\neg A{\Rightarrow}\underbrace{A){\Rightarrow}A){\Rightarrow}\ldots){\Rightarrow}A}_{2k\ A\text{-čiek}}$

q) $\vdash ((A{\Rightarrow}B){\Rightarrow}A){\Rightarrow}A$

r) $A{\Rightarrow}B \vdash (C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)$

s) $A \Rightarrow B \vdash (C \wedge A) \Rightarrow (C \wedge B)$

t) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash \neg(A \wedge \neg C)$

u) $\vdash (A \vee (B \vee C)) \Rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$

v) $\vdash ((B \vee (A \vee C)) \vee A) \Rightarrow (A \vee (B \vee C))$

x) $A{\Rightarrow}(B{\Rightarrow}C),\ A{\Rightarrow}B \vdash A \Rightarrow (A{\Rightarrow}C)$

y) $\vdash (A{\Rightarrow}C) \Rightarrow ((B{\Rightarrow}C){\Rightarrow}((\neg A{\Rightarrow}B){\Rightarrow}C))$

z) $A \Rightarrow B,\ C \Rightarrow D \vdash (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge D)$

3 Veta o úplnosti

Doteraz sme skúmali vždy pravdivé formuly z dvoch hľadísk. Jednak sme skúmali tie, pre ktoré platí $\models A$ (tautológie) a potom tie, pre ktoré $\vdash A$ (odvoditeľné, čiže dokázateľné formuly). Pripomeňme, že tautológie sú také formuly, ktoré pri ľubovoľnom ohodnotení ν prvotných formúl dávajú $\overline{\nu}(A) = 1$, zatiaľ čo dokázateľné formuly sa dajú odvodiť z axióm pomocou pravidla modus ponens.

Postova veta

V tejto časti ukážeme, že $\models A$ platí práve vtedy, keď $\vdash A$.

Nech je ν ohodnotenie prvotných formúl. Definujme

$$B^\nu = \begin{cases} B & \text{ak} \quad \overline{\nu}(B) = 1, \\ \neg B & \text{ak} \quad \overline{\nu}(B) = 0. \end{cases}$$

Takto definované formuly sme používali v dôkaze Vety 1.1.

Lema 3.1. *Nech je ν ohodnotenie prvotných formúl $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ a nech všetky prvotné formuly, ktoré sa vyskytujú v A, sú medzi $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Potom $\{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash A^\nu$.*

Poznámka. Napríklad ak je A formula $p_1 \Rightarrow p_2$ a ohodnotenie ν spĺňa, $\nu(p_1)=1$ a $\nu(p_2)=0$, potom $\overline{\nu}(A)=0$. Tu Lema 3.1 tvrdí: $p_1, \neg p_2 \vdash \neg(p_1 \Rightarrow p_2)$, ale to je práve tvrdenie Lemy 2.9 (po dvojnásobnej aplikácii Vety o dedukcii).

Dôkaz. Indukciou podľa konštrukcie formuly A.

1° Ak je A prvotná formula p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tak platí $\{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash p_i^\nu$.

2° (I) Nech A má tvar $\neg B$, pričom pre B tvrdenie lemy platí, teda platí $\{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash B^\nu$. Rozlíšime dva prípady:

(a) $\overline{\nu}(B) = 1$. Potom $\overline{\nu}(A) = \overline{\nu}(\neg B) = 0$, B^ν je B a A^ν je $\neg A$ (čiže $\neg\neg B$). Teda:

$$\begin{array}{rll} 1'\!: & \{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash B^\nu & \text{IP} \\ 1''\!: & \{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash B & \\ 2'\!: & \vdash B \Rightarrow \neg\neg B & \text{Lema 2.7} \\ 3'\!: & \{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash \neg\neg B & \text{MP}(1'', 2') \\ 3''\!: & \{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash A^\nu & \end{array}$$

(b) $\overline{\nu}(B) = 0$. Potom $\overline{\nu}(A) = \overline{\nu}(\neg B) = 1$, B^ν je $\neg B$ a A^ν je A (čiže $\neg B$). Teda:

$$\begin{array}{rll} 1'\!: & \{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash B^\nu & \text{IP} \\ 1''\!: & \{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash \neg B & \\ 1'''\!: & \{p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu\} \vdash A^\nu & \end{array}$$

(II) Nech A má tvar $B \Rightarrow C$, pričom pre B aj C tvrdenie lemy platí, teda platí $\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash B^\nu$ aj $\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash C^\nu$. Rozlíšime tri prípady:

(a) $\overline{\nu}(B) = 0$. Potom $\overline{\nu}(A) = \overline{\nu}(B{\Rightarrow}C) = 1$, B^ν je $\neg B$ a A^ν je $B \Rightarrow C$. Teda:

$1'$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash B^\nu$	IP
$1''$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash \neg B$	
$2'$:	$\vdash \neg B \Rightarrow (B{\Rightarrow}C)$	Lema 2.5
$3'$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash B \Rightarrow C$	MP$(1'', 2')$
$3''$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash A^\nu$	

(b) $\overline{\nu}(C) = 1$. Potom $\overline{\nu}(A) = \overline{\nu}(B{\Rightarrow}C) = 1$, C^ν je C a A^ν je $B \Rightarrow C$. Teda:

$1'$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash C^\nu$	IP
$1''$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash C$	
$2'$:	$\vdash C \Rightarrow (B{\Rightarrow}C)$	A1
$3'$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash B \Rightarrow C$	MP$(1'', 2')$
$3''$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash A^\nu$	

(c) Zostáva posledný prípad $\overline{\nu}(B) = 1$ a $\overline{\nu}(C) = 0$. Potom $\overline{\nu}(A) = \overline{\nu}(B{\Rightarrow}C) = 0$, B^ν je B, C^ν je $\neg C$ a A^ν je $\neg(B{\Rightarrow}C)$. Teda:

$1'$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash B^\nu$	IP
$1''$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash B$	
$2'$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash C^\nu$	IP
$2''$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash \neg C$	
$3'$:	$\vdash B \Rightarrow (\neg C {\Rightarrow} \neg(B{\Rightarrow}C))$	Lema 2.9
$4'$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash \neg C \Rightarrow \neg(B{\Rightarrow}C)$	MP$(1'', 3')$
$5'$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash \neg(B{\Rightarrow}C)$	MP$(2'', 4')$
$5''$:	$\{p_1^\nu, p_2^\nu, \dots, p_n^\nu\} \vdash A^\nu$	$\square$

Veta 3.2 (**Postova**). *Pre ľubovoľnú formulu A výrokovej logiky platí $\vdash A$ práve vtedy, keď $\models A$.*

Dôkaz. Nech platí $\vdash A$. Z Cvičenia 1.2 vieme, že všetky axiómy sú tautológie a podľa Cvičenia 1.3 ak $\models B$ a $\models B{\Rightarrow}C$, tak aj $\models C$. Teda pre ľubovoľný dôkaz $A_1, A_2, \dots, A_n$ formuly A platí $\models A_i$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ a teda aj $\models A$. (Poznamenajme, že dôkaz $A_1, A_2, \dots, A_n$ bol dôkaz v zmysle definície pred Lemou 2.1, čiže bez predpokladov. Vzhľadom na poznámku za Vetou o dedukcii, z každého dôkazu formuly A, aj z toho, ktorý využíva Vetu o dedukcii a iné pomocné tvrdenia, vieme vytvoriť dôkaz v zmysle definície pred Lemou 2.1.)

Naopak, majme danú tautológiu A. Ukážeme, že A je dokázateľná. Nech sú $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ všetky prvotné formuly vyskytujúce sa v A. Potom podľa Lemy 3.1 pre ľubovoľné ohodnotenie μ prvotných formúl platí $\{p_1^\mu, p_2^\mu, \dots, p_n^\mu\} \vdash A$. (Keďže A je tautológiou, tak A^μ je vždy A.)

Nech je μ' ohodnotenie líšiace sa od μ len v hodnote pre p_n. Potom aj pre μ' platí Lema 3.1 a teda:

$1'$:	$\{p_1^\mu, p_2^\mu, \dots, p_{n-1}^\mu, p_n\} \vdash A$	Lema 3.1
$2'$:	$\{p_1^\mu, p_2^\mu, \dots, p_{n-1}^\mu, \neg p_n\} \vdash A$	Lema 3.1
$3'$:	$\{p_1^\mu, p_2^\mu, \dots, p_{n-1}^\mu\} \vdash A$	Veta 2.10 na $1'$ a $2'$

Teraz zvoľme μ'' také, že μ'' sa líši od μ len v hodnote priradenej p_{n-1}. Potom obdobne, ako v predchádzajúcom (μ bolo ľubovoľné), vieme odvodiť aj:

1^*: $\{p_1^{\mu''}, p_2^{\mu''}, \dots, p_{n-1}^{\mu''}\} \vdash A$, teda máme

$1'$: $\{p_1^\mu, p_2^\mu, \ldots, p_{n-2}^\mu, p_{n-1}\} \vdash A$
$2'$: $\{p_1^\mu, p_2^\mu, \ldots, p_{n-2}^\mu, \neg p_{n-1}\} \vdash A$
$3'$: $\{p_1^\mu, p_2^\mu, \ldots, p_{n-2}^\mu\} \vdash A$ Veta 2.10 na $1'$ a $2'$

Takto môžeme vylúčiť všetky prvotné formuly a dokážeme $\vdash A$. □

Definícia. Formálny systém je **sporný**, ak je v ňom dokázateľná ľubovoľná formula. Ak formálny systém nie je sporný, nazývame ho **bezosporný** (**konzistentný**).

Veta 3.3. *Výroková logika je bezosporný formálny systém.*

Dôkaz. Ak by bola výroková logika sporným formálnym systémom, tak potom by pre každú formulu A (hoci aj prvotnú) platilo $\vdash A$ aj $\vdash \neg A$. Ale podľa Postovej vety by potom malo platiť $\models A$ aj $\models \neg A$, čo zjavne neplatí. □

Splniteľnosť

Teraz sa budeme zaoberať tautologickými dôsledkami množín formúl (teórií).

Definícia. Nech je T množina výrokových formúl. Potom T je **splniteľná** (**konzistentná**), ak existuje ohodnotenie ν prvotných formúl vyskytujúcich sa v T také, že pre každú formulu A z T platí $\overline{\nu}(A) = 1$. Takéto ohodnotenie ν sa nazýva **model** množiny formúl T.

Ak T nie je splniteľná, tak je **nesplniteľná**.

Príklad. Zistite, či je množina $T = \{A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow A\}$ splniteľná a ak je, nájdite jej modely.

Príklad vyriešime pomocou pravdivostnej tabuľky. V T sa vyskytujú dve prvotné formuly A a B, preto bude mať tabuľka 4 riadky:

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow A$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Keďže modely T sú také ohodnotenia, pre ktoré majú $A \Rightarrow B$ aj $\neg B \Rightarrow A$ pravdivostnú hodnotu 1, tak T má dva modely. Jeden je ohodnotenie ν, pre ktoré $\nu(A) = 0$ a $\nu(B) = 1$, druhý je ohodnotenie μ, pre ktoré $\mu(A) = \mu(B) = 1$.

Definícia. Nech je T množina výrokových formúl a nech je A výroková formula. Potom A je **tautologickým dôsledkom** T, zapisujeme $T \models A$, ak pre každý model ν množiny T platí $\overline{\nu}(A) = 1$.

Skutočnosť, že A nie je tautologickým dôsledkom T, zapisujeme $T \not\models A$.

Poznámka 1. Modelom prázdnej množiny formúl je ľubovoľné ohodnotenie. Preto $\models A$ (čo je vlastne $\{\} \models A$) platí práve vtedy, keď je A tautológia. To znamená, že $\models A$ je korektné označenie aj v zmysle tejto definície.

Poznámka 2. Ak je T nesplniteľná, tak ľubovoľná formula je jej tautologickým dôsledkom.

Lema 3.4. *Nech je A formula a T nech je množina formúl. Potom $T \models A$ platí práve vtedy, keď je $T \cup \{\neg A\}$ nesplniteľná.*

Dôkaz. Najprv predpokladajme $T \models A$. Nech je ν ľubovoľné ohodnotenie prvotných formúl. Ak ν nie je modelom T, tak nie je ani modelom $T \cup \{\neg A\}$. Naopak, ak ν je modelom T, tak z predpokladu $T \models A$ plynie $\overline{\nu}(A) = 1$, čo dáva $\overline{\nu}(\neg A) = 0$. Teda ani v tomto prípade ν nie je modelom $T \cup \{\neg A\}$. Keďže ν bolo ľubovoľné, $T \cup \{\neg A\}$ nemá model, čiže je nesplniteľná.

Teraz predpokladajme, že je $T \cup \{\neg A\}$ nesplniteľná. Ak T nemá model, tak podľa Poznámky 2 platí $T \models A$. Predpokladajme preto, že je T splniteľná. Nech je ν ľubovoľný model T. Keďže $T \cup \{\neg A\}$ nie je splniteľná, musí platiť $\overline{\nu}(\neg A) = 0$, čiže $\overline{\nu}(A) = 1$. Keďže ν bol ľubovoľný model T, dostávame $T \models A$. $\square$

Lema 3.5. *Nech sú $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a B výrokové formuly. Potom B je tautologickým dôsledkom formúl $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ práve vtedy, keď je tautológiou formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$.*

Dôkaz. Nech $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B$. Ak existuje ohodnotenie prvotných formúl vyskytujúcich sa v $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ také, že $\overline{\nu}((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B) = 0$, tak potom $\overline{\nu}(B) = 0$ a zároveň $\overline{\nu}(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) = 1$. To značí, že platí $\overline{\nu}(A_1) = \overline{\nu}(A_2) = \cdots = \overline{\nu}(A_n) = 1$, čo je spor s tým, že B je tautologickým dôsledkom $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Naopak, nech $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \not\models B$. Potom pre $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ existuje model μ taký, že $\overline{\mu}(B) = 0$. Avšak potom $\overline{\mu}(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) = 1$, čo značí, že $\overline{\mu}((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B) = 0$, a teda $\not\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$. $\square$

Porovnajte Lemu 3.5 s Vetou 2.13. Ak označíme $T = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ a $C = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, tak Lema 3.5 tvrdí, že $T \models B$ práve vtedy, keď $\models C \Rightarrow B$. Nuž a Veta 2.13 tvrdí, že $T \vdash B$ práve vtedy, keď $\vdash C \Rightarrow B$. V ďalšom si ukážeme, že toto nie je náhodné.

Veta o úplnosti

V tejto podkapitole ukážeme, že pre ľubovoľnú množinu formúl T platí $T \models A$ práve vtedy, keď $T \vdash A$. Obmedzíme sa však na prípad, keď bude množina T konečná. Pre nekonečné množiny T sa úplne rovnaké tvrdenie dokáže za pomoci takzvanej Vety o kompaktnosti.

Definícia. Množina výrokových formúl T je **sporná**, ak je z T dokázateľná ľubovoľná výroková formula. V opačnom prípade je T **bezosporná** (**konzistentná**).

Pri tautológiách sme pojem konzistentný stotožňovali s pojmom splniteľný. Ukážeme, že pojem splniteľný a bezosporný sú vo výrokovej logike synonymá.

LEMA 3.6. *Nech je T množina výrokových formúl. Potom T je sporná práve vtedy, keď existuje formula A taká, že $T \vdash A$ aj $T \vdash \neg A$.*

DÔKAZ. Ak T je sporná, tak $T \vdash B$ pre každú formulu. Teda $T \vdash A$ aj $T \vdash \neg A$.

Teraz ukážeme, že ak $T \vdash A$ a $T \vdash \neg A$ pre nejakú formulu A, tak je T sporná. Nech teda $T \vdash A$ aj $T \vdash \neg A$. Potom pre ľubovoľnú formulu B platí:

1:	$T \vdash A$	predpoklad
2:	$T \vdash \neg A$	predpoklad
3:	$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	Lema 2.5
4:	$T \vdash A \Rightarrow B$	MP(2,3)
5:	$T \vdash B$	MP(1,4)

Teda T je sporná. □

LEMA 3.7. *Konečná množina formúl T je bezosporná práve vtedy, keď je splniteľná, t. j. keď existuje ohodnotenie ν prvotných formúl také, ktorého rozšírenie $\overline{\nu}$ priradí každej formule z T hodnotu 1.*

DÔKAZ. Nech je $T = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ bezosporná množina formúl. Potom podľa definície bezospornosti existuje formula A taká, že $T \nvdash A$. Z Vety 2.13 plynie, že $\nvdash (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \Rightarrow A$ a z Postovej vety $\nvDash (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \Rightarrow A$. To značí, že existuje ohodnotenie ν, pre ktoré $\overline{\nu}((B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \Rightarrow A) = 0$. Avšak potom $\overline{\nu}(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) = 1$, čiže $\overline{\nu}(B_i) = 1$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$. To značí, že T je splniteľná.

Naopak, ak je $T = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ sporná, tak pre ľubovoľnú formulu A platí $T \vdash A \wedge \neg A$. Potom $\vdash (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \Rightarrow (A \wedge \neg A)$ podľa Vety 2.13 a $\vDash (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \Rightarrow (A \wedge \neg A)$ podľa Postovej vety. Označme symbolom B formulu $(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \Rightarrow (A \wedge \neg A)$. Keďže B je tautológia, tak pre ľubovoľné ohodnotenie prvotných formúl ν platí $\overline{\nu}(B) = 1$. Keďže však $A \wedge \neg A$ je kontradikcia, tak platí $\overline{\nu}(A \wedge \neg A) = 0$, a preto $\overline{\nu}(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) = 0$. To znamená, že pre každé ohodnotenie prvotných formúl ν existuje i, $1 \leq i \leq n$ také, že $\overline{\nu}(B_i) = 0$, čiže T nie je splniteľná. □

Nasledujúca veta je zovšeobecnením Postovej vety pre formuly dokázateľné z konečnej množiny predpokladov.

VETA 3.8 (**o úplnosti**). *Nech je T konečná množina výrokových formúl. Potom*

(a) *T je bezosporná práve vtedy, keď je splniteľná;*
(b) *pre ľubovoľnú formulu A platí $T \vdash A$ práve vtedy, keď $T \vDash A$.*

DÔKAZ. Prvú časť sme dokázali v Leme 3.7, preto sa zameriame na druhú časť. Najprv ukážeme, že ak $T \vdash A$, tak aj $T \vDash A$. Nech $T = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Podľa Vety 2.13 platí $\vdash (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \Rightarrow A$ a z Postovej vety vyplýva, že platí aj $\vDash (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \Rightarrow A$. Avšak podľa Lemy 3.5 $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \vDash A$, čiže $T \vDash A$.

V ďalšom ako medzikrok ukážeme, že ak $T \nvdash A$, potom tiež $T \cup \{\neg A\} \nvdash A$. Totiž v opačnom prípade by sme mali:

1:	$T \cup \{\neg A\} \vdash A$	predpoklad
2:	$T \vdash \neg A \Rightarrow A$	VD(1)
3:	$\vdash (\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$	A3
4:	$\vdash \neg A \Rightarrow \neg A$	Lema 2.1
5:	$\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	MP(4,3)
6:	$T \vdash A$	MP(2,5)

čo je v spore s $T \nvdash A$.

Teraz ukážeme, že ak $T \nvdash A$, tak aj $T \nvDash A$. Predpokladajme preto, že $T \nvdash A$. Podľa medzikroku potom platí $T \cup \{\neg A\} \nvdash A$. To značí, že $T \cup \{\neg A\}$ je bezosporná a podľa časti (a) je $T \cup \{\neg A\}$ splniteľná. Avšak podľa Lemmy 3.4 potom máme $T \nvDash A$. $\square$

Veta o úplnosti ukazuje, že medzi $\models$ a $\vdash$ nie je rozdiel.

Pre upresnenie dodajme, že zvyčajne sa pod vetou o úplnosti myslí: „Ak $T \models A$, potom aj $T \vdash A$“. Opačné tvrdenie: „Ak $T \vdash A$ potom aj $T \models A$“ sa nazýva *veta o korektnosti.*

Dôkazy

Na záver tejto kapitoly sa pozrieme detailnejšie na pojem dôkazu.

Dôkaz (odvodenie) je vo výrokovej logike definovaný ako postupnosť formúl, kde je každá formula buď axióma, alebo modus ponens dvoch skôr uvedených formúl. V prípade dôkazu z predpokladov pripúšťame ešte, aby bola formula predpokladom. Okrem takto definovaného dôkazu, ktorý nazývame **dôkaz priamo**, sme ešte využívali **matematickú indukciu**. Ňou vieme dokázať (odvodiť) tvrdenia T_i, kde $i \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Mimo matematickej logiky však poznáme aj iné dôkazy, ktoré úzko súvisia s tautológiami.

Dôkaz nepriamo. Ak máme dokázať implikáciu $A \Rightarrow B$, tak niekedy môže byť ľahšie dokázať namiesto toho $\neg B \Rightarrow \neg A$. Potom $A \Rightarrow B$ dostaneme z $\neg B \Rightarrow \neg A$ pomocou vety o obrátenej implikácii:

1:	$\vdash \neg B \Rightarrow \neg A$	túto formulu dokážeme
2:	$\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	VOOI
3:	$\vdash A \Rightarrow B$	MP(1,2)

Dôkaz s využitím pravidla sylogizmu. Ak potrebujeme dokázať, že sú tvrdenia A_1, A_2, ... , A_k ekvivalentné, stačí ak ukážeme

$$\vdash A_1 \Rightarrow A_2, \quad \vdash A_2 \Rightarrow A_3, \quad \ldots, \quad \vdash A_{k-1} \Rightarrow A_k, \quad \vdash A_k \Rightarrow A_1.$$

Totiž teraz pre ľubovoľné $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ vieme pomocou pravidla sylogizmu z predchádzajúcej k-tice formúl odvodiť $\vdash A_i \Rightarrow A_j$ aj $\vdash A_j \Rightarrow A_i$, čo nám dáva $\vdash A_i \Leftrightarrow A_j$.

Dôkaz sporom. Označme symbolom 0 kontradikciu. Potom v najzákladnejšej verzii má dôkaz sporom tvar

$$\vdash (\neg A \Rightarrow 0) \Rightarrow A.$$

Teda keď z $\neg A$ vyplýva vždy nepravdivé tvrdenie, tak musí byť vždy nepravdivé tvrdenie aj $\neg A$, čiže A je tautológia. Znamená to, že stačí odvodiť $\vdash \neg A \Rightarrow 0$ a potom modus ponens tvrdení $\vdash \neg A \Rightarrow 0$ a $\vdash (\neg A \Rightarrow 0) \Rightarrow A$ dá $\vdash A$.

Iné tvary dôkazu sporom sú

$$\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A, \qquad \text{respektíve} \qquad \vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A),$$

čo je axióma A3. V prvom prípade stačí odvodiť $\vdash \neg A \Rightarrow A$ a modus ponens tvrdení $\vdash \neg A \Rightarrow A$ a $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ nám dá $\vdash A$. V druhom prípade odvodíme formuly $\neg A \Rightarrow \neg B$ a $\neg A \Rightarrow B$. Potom modus ponens tvrdení $\vdash \neg A \Rightarrow \neg B$ a $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ dá $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ a ďalší modus ponens $\vdash \neg A \Rightarrow B$ a $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ dá $\vdash A$.

Spomenuli sme tu niektoré používanejšie typy dôkazov. Avšak ľubovoľná tautológia (tautologický dôsledok) je vlastne typ dôkazu.

Cvičenia

Cvičenie 3.1. Pomocou ohodnotení ν, podobne ako v Cvičení 1.3, ukážte, že ak platí $T \models A$ a $T \models A \Rightarrow B$, tak platí $T \models B$.

Cvičenie 3.2. Dokážte nasledujúce tautologické dôsledky:
a) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$ b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \models B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Cvičenie 3.3. Dokážte:
a) $A \Rightarrow B \models (C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)$
b) $A \Rightarrow B \models (C \wedge A) \Rightarrow (C \wedge B)$
c) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \models \neg(A \wedge \neg C)$
d) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C),\ A \Rightarrow B \models A \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
e) $A \Rightarrow B,\ C \Rightarrow D \models (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge D)$

Cvičenie 3.4*. Dokážte, že axióma A3 nezávisí od A1 a A2, teda že neexistuje dôkaz A3 využívajúci len A1, A2 a modus ponens. (Návod: Uvažujte zobrazenie φ vynechávajúce symboly negácie $\neg$ a jeho dopad na dôkaz A3 z prvotných formúl pomocou A1, A2 a MP.)

Cvičenie 3.5. Ukážte, že sú nasledujúce formuly vždy platné. Môžete použiť Postovu vetu. (To znamená, že buď pomocou pravdivostných tabuliek ukážete že sú tautoógie, alebo ukážete že sú dokázateľné, čiže odvodíte ich z axióm A1, A2 a A3 pomocou pravidla modus ponens.)
a) $\big((A \Rightarrow B) \vee C\big) \Rightarrow \Big(\big((A \wedge D) \Leftrightarrow B\big) \Rightarrow \big((A \Rightarrow B) \vee C\big)\Big)$
b) $\Big(\big(A \wedge \neg(B \vee C)\big) \Rightarrow (D \vee \neg A)\Big) \Rightarrow \Big((A \wedge \neg D) \Rightarrow \big(\neg(B \vee C) \Rightarrow \neg A\big)\Big)$

4 Sémantické stromy

Doposiaľ sme na odvodenie toho, či je formula vždy pravdivá, používali buď pravdivostné tabuľky, alebo odvodzovanie z axióm pomocou pravidla modus ponens. V tejto časti si ukážeme ďalší postup, ktorý sa nazýva **metóda sémantických stromov** (**sémantických tabiel**). Táto metóda je založená na prepise formuly do disjunktívneho (respektíve konjunktívneho) normálneho tvaru.

Disjunktívne a konjunktívne normálne tvary formúl

Pripomeňme si, že formula je v disjunktívnom normálnom tvare ak je disjunkciou niekoľkých formúl, z ktorých každá je konjunkciou prvotných formúl, respektíve ich negácií. Podformuly, ktoré spájajú disjunkcie, nazývame **klauzuly**. Naopak podformuly, ktoré spájajú konjunkcie, nazývame **literály**. To znamená, že literály sú prvotné formuly a ich negácie.

Príklad. Formula

$$(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c)$$

je v disjunktívnom normálnom tvare. Táto formula má tri klazuzuly $(\neg a \wedge b \wedge c)$, ďalej $(a \wedge \neg b)$ a $(b \wedge c)$. Literálmi prvej klauzuly sú $\neg a$, b a c.

Naopak, formula je v konjunktívnom normálnom tvare ak je konjunkciou niekoľkých formúl, z ktorých každá je disjunkcia prvotných formúl, respektíve ich negácií. Podformuly, ktoré spájajú konjunkcie, nazývame **klauzuly** a podformuly, ktoré spájajú disjunkcie, nazývame **literály**.

Príklad. Formula

$$(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee c)$$

je v konjunktívnom normálnom tvare. Táto formula má štyri klazuzuly $(a \vee \neg b)$, $(\neg a \vee b \vee \neg c)$, $(\neg b \vee c)$ a $(\neg a \vee c)$. Literálmi druhej klauzuly sú $\neg a$, b a $\neg c$.

Formulu v disjunktívnom normálnom tvare nazývame DNF-formula a formulu v konjunktívnom normálnom tvare nazývame KNF-formula. Literály p a $\neg p$ nazývame komplementárne.

Všimnime si, že na rozdiel od Kapitoly 1 teraz pripúšťame, že klauzuly DNF- a KNF-formuly môžu obsahovať komplementárne literály. To preto, lebo keď v klauzulách komplementárne literály povolíme, tak platí nasledujúce tvrdenie, ktoré budeme používať pri sémantických stromoch.

Veta 4.1.

(1) *Formula A je kontradikciou práve vtedy, keď s ňou ekvivalentná DNF-formula obsahuje v každej klauzuli dvojicu komplementárnych literálov.*
(2) *Formula A je tautológiou práve vtedy, keď DNF-formula ekvivalentná s $\neg A$ obsahuje v každej klauzuli dvojicu komplementárnych literálov.*
(3) *Formula A je splniteľná práve vtedy, keď s ňou ekvivalentná DNF-formula obsahuje klauzulu bez dvojice komplementárnych literálov.*

Analogické tvrdenie platí pre konjunktívny normálny tvar.

Veta 4.2.

(1) *Formula A je kontradikciou práve vtedy, keď KNF-formula ekvivalentná s $\neg A$ obsahuje v každej klauzuli dvojicu komplementárnych literálov.*
(2) *Formula A je tautológiou práve vtedy, keď s ňou ekvivalentná KNF-formula obsahuje v každej klauzuli dvojicu komplementárnych literálov.*
(3) *Formula A je splniteľná práve vtedy, keď KNF-formula ekvivalentná s $\neg A$ obsahuje klauzulu bez dvojice komplementárnych literálov.*

Všimnime si, že bod (3) vo Vetách 4.1 a 4.2 je dôsledkom bodu (1), pretože formula je splniteľná práve vtedy, keď nie je kontradikciou.

Prepis formuly do disjunktívneho normálneho tvaru

Pripomeňme si, že de Morganove pravidlá tvrdia

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \qquad \text{a} \qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B).$$

Distributívne zákony pre konjunkciu a disjunkciu sú

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \qquad \text{a} \qquad (A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)).$$

Okrem toho budeme využívať komutativitu konjunkcie a disjunkcie

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A) \qquad \text{a} \qquad (A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A),$$

ich asociativitu

$$(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C) \qquad \text{a} \qquad (A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C),$$

ako aj nasledujúce ekvivalencie

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A\,, \qquad (A \wedge A) \Leftrightarrow A \qquad \text{a} \qquad (A \vee A) \Leftrightarrow A.$$

Budeme predpokladať, že vo formule sa vyskytujú iba logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$. Potom keď chceme danú formulu prepísať do DNF-formuly (KNF-formuly) môžeme postupovať nasledujúcim spôsobom.

(a) Nahradením formuly $A \Leftrightarrow B$ formulou $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ odstránime ekvivalencie.
(b) Nahradením formuly $A \Rightarrow B$ formulou $\neg A \vee B$ odstránime implikácie.
(c) Pomocou de Morganových pravidiel odstránime negácie spred zátvoriek.
(d) Pomocou distributívnych zákonov zostrojíme DNF-formulu (respektíve KNF-formulu) ekvivalentnú s pôvodnou, danou formulou.

Príklad 4.1. Zostrojte DNF-formulu ekvivalentnú s formulou

$$A: \quad (a \Leftrightarrow \neg b) \wedge (c \Rightarrow \neg(a \vee \neg c)).$$

Aplikáciou krokov (a) – (d) dostávame ekvivalentné formuly:

$$\begin{aligned}
A: \quad & (a \Leftrightarrow \neg b) \wedge (c \Rightarrow \neg(a \vee \neg c)) & \\
& \big((a \Rightarrow \neg b) \wedge (\neg b \Rightarrow a)\big) \wedge \big(c \Rightarrow \neg(a \vee \neg c)\big) & (a) \\
& \big((\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg\neg b \vee a)\big) \wedge \big(\neg c \vee \neg(a \vee \neg c)\big) & (b) \\
A_1: \quad & \big((\neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee a)\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \wedge \neg\neg c)\big) & (c) \\
& \big(((\neg a \vee \neg b) \wedge b) \vee ((\neg a \vee \neg b) \wedge a)\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \wedge c)\big) & (d) \\
& \big((\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge b) \vee (\neg a \wedge a) \vee (\neg b \wedge a)\big) \wedge \big(\neg c \vee (\neg a \wedge c)\big) & (d) \\
& (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge a \wedge \neg c) \vee & \\
& \qquad \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg a \wedge c) \vee (\neg b \wedge b \wedge \neg a \wedge c) \vee & \\
& \qquad \vee (\neg a \wedge a \wedge \neg a \wedge c) \vee (\neg b \wedge a \wedge \neg a \wedge c) & (d)
\end{aligned}$$

Keďže klauzuly obsahujúce komplementárne literály nie sú nikdy splnené, A je ekvivalentná s DNF-formulou $(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)$.

Poznamenajme, že pri prepise na KNF-formulu by sme distributívny zákon aplikovali iba na pravú podformulu A_1.

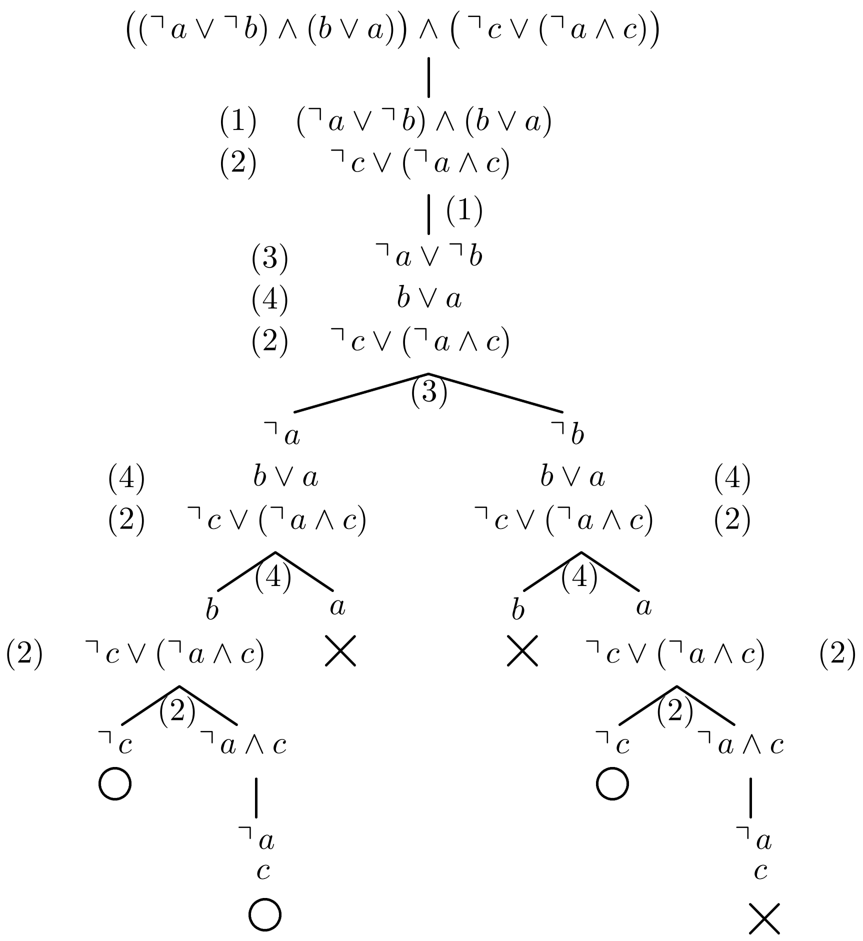
Ako vidno v Príklade 4.1, najprácnejšia je aplikácia distributívnych zákonov v kroku (d). Pomocou sémantických stromov sa tomuto môžeme čiastočne vyhnúť.

Sémantické stromy

Majme formulu A. Na začiatok predpokladajme, že A obsahuje iba konjunkcie, disjunkcie a literály. Znamená to že A je v tvare, ktorý dostaneme po kroku (c) z predchádzajúcej podkapitoly. Budeme zostrojovať strom s koreňom A indukciou podľa konštrukcie formuly. Použijeme pri tom pravidlá zobrazené na Obrázku 1.

Obrázok 1

Pre formulu A_1 z Príkladu 4.1 je sémantický strom zostrojený na Obrázku 2. Pre lepšiu prehľadnosť sme formuly očíslovali.

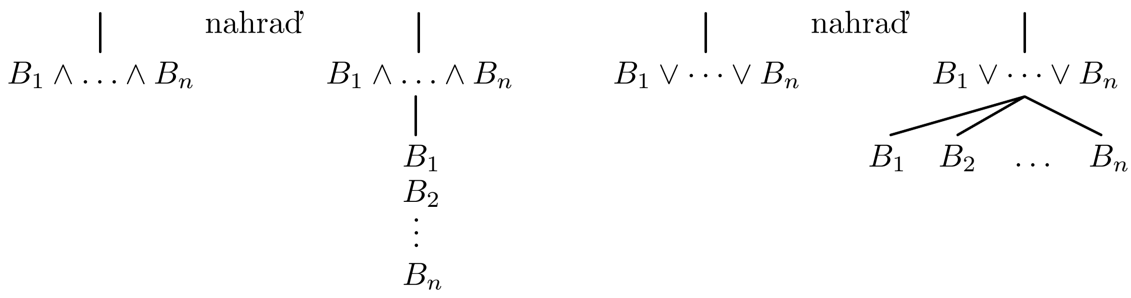


Obrázok 2

Vetvy, v ktorých sa vyskytuje dvojica komplementárnych literálov, nazývame **uzavreté** a značíme ich symbolom $\times$. Tieto vetvy ďalej nerozvíjame, pretože je to zbytočné, tieto vetvy sú nezaujímavé. Naopak vetvy, ktoré neobsahujú dvojicu komplementárnych literálov, nazývame **otvorené** a označujeme ich symbolom $\bigcirc$. Všimnime si, že pomocou otvorených vetiev vieme zostrojiť DNF-formulu ekvivalentnú s A keď zapíšeme literály vyskytujúce sa pozdĺž týchto vetiev do klauzúl. V našom prípade dostávame $(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg b \wedge a \wedge \neg c)$, čo je presne DNF-formula, ktorú sme dostali v Príklade 4.1.

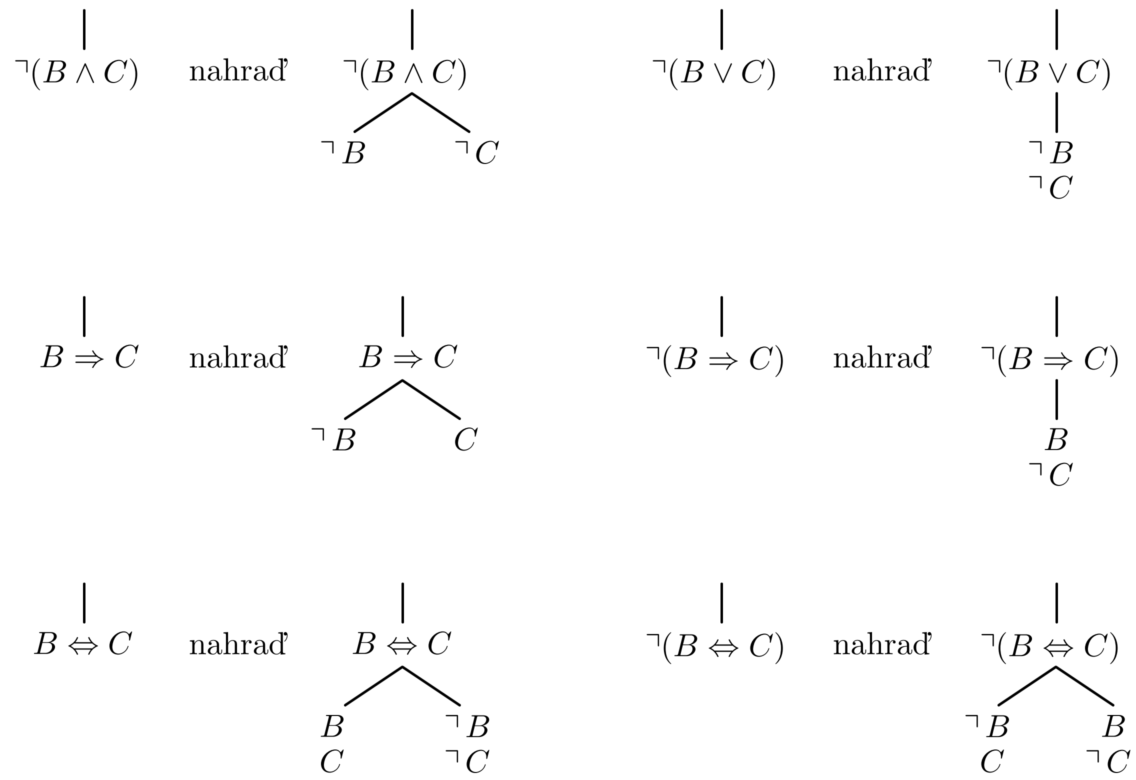
Zjednodušené sémantické stromy

Postup konštrukcie sémantických stromov možno urýchliť. Najprv, prvý medzikrok sme mohli vynechať. Dostávame pravidlá znázornené na Obrázku 3.



Obrázok 3

Okrem toho môžeme pomocou pravidiel znázornených na Obrázku 4 simulovať kroky (a) – (c) algoritmu, ktorý sme opísali na začiatku tejto kapitoly.

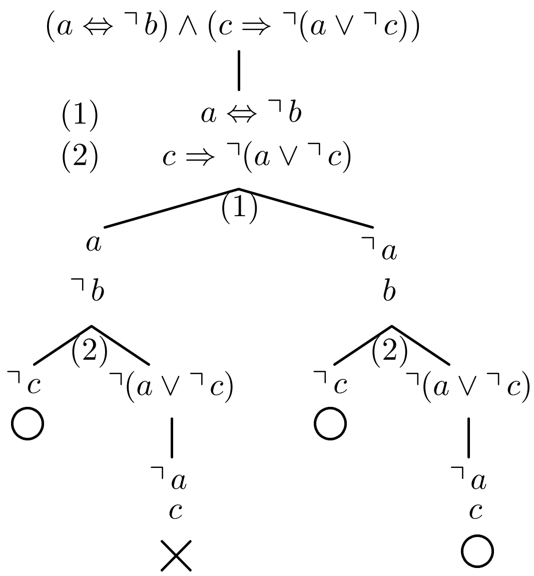


Obrázok 4

Príklad. Zostrojte DNF-formulu elvivalentnú s A: $(a \Leftrightarrow \neg b) \wedge (c \Rightarrow \neg(a \vee \neg c))$.

Všimnime si, že A je formula z Príkladu 4.1. Postup pomocou zjednodušeného sémantického stromu je znázornený na Obrázku 5. Na tomto obrázku číslujeme iba tie formuly, ktoré nerozvíjame okamžite. Tiež sme upustili od prácneho opakovania doposiaľ nerozvinutých formúl.

Zistili sme, že A je ekvivalentná s $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)$. Teraz je už zrejmé, že postup pomocou sémantických stromov je rýchlejší ako prepis pomocou pravidiel (a) – (d).



Obrázok 5

Riešenie úloh pomocou sémantických stromov

V tejto podkapitole budeme pomocou sémantických stromov riešiť rôzne úlohy. Využijeme na to nasledujúce tvrdenie, ktoré plynie z Vety 4.1.

VETA 4.3.

(1) *Formula A je kontradikciou práve vtedy, keď sú všetky vetvy sémantického stromu pre A uzavreté.*
(2) *Formula A je tautológiou práve vtedy, keď sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté.*
(3) *Formula A je splniteľná práve vtedy, keď je aspoň jedna vetva sémantického stromu pre A otvorená.*

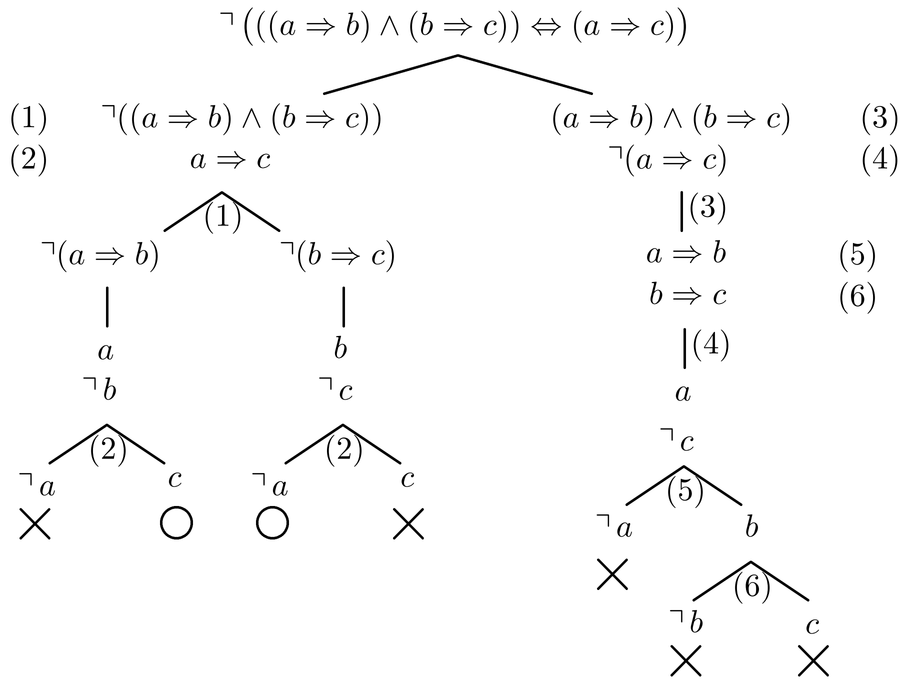
Pomocou Vety 4.3 vieme určiť aj to, či je množina formúl $A_1, A_2, \ldots, A_n$ splniteľná. Nato stačí určiť, či je splniteľná formula $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$. Podobne B je tautologickým dôsledkom $A_1, A_2, \ldots, A_n$ práve vtedy, keď je tautológiou formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$, čiže keď je $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ kontradikciou. Podobne, A a B sú ekvivalentné, keď je $A \Leftrightarrow B$ tautológia, čiže keď je $\neg(A \Leftrightarrow B)$ kontradikcia. Dostávame nasledujúcu vetu.

VETA 4.4.

(1) *Množina formúl $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je splniteľná práve vtedy, keď je aspoň jedna vetva sémantického stromu pre $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ otvorená.*
(2) *$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ práve vtedy, keď sú všetky vetvy sémantického stromu pre $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ uzavreté.*
(3) *Formuly A a B sú ekvivalentné práve vtedy, keď sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg(A \Leftrightarrow B)$ uzavreté.*

Príklad. Sú formuly $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$ a $a \Rightarrow c$ ekvivalentné?

Pri riešení príkladu použijeme Vetu 4.4 (3). To znamená, že zostrojíme sémantický strom pre $\neg\big(((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Leftrightarrow (a \Rightarrow c)\big)$, pozri Obrázok 6. Keďže tento strom obsahuje otvorenú vetvu, dané formuly nie sú ekvivalentné.



Obrázok 6

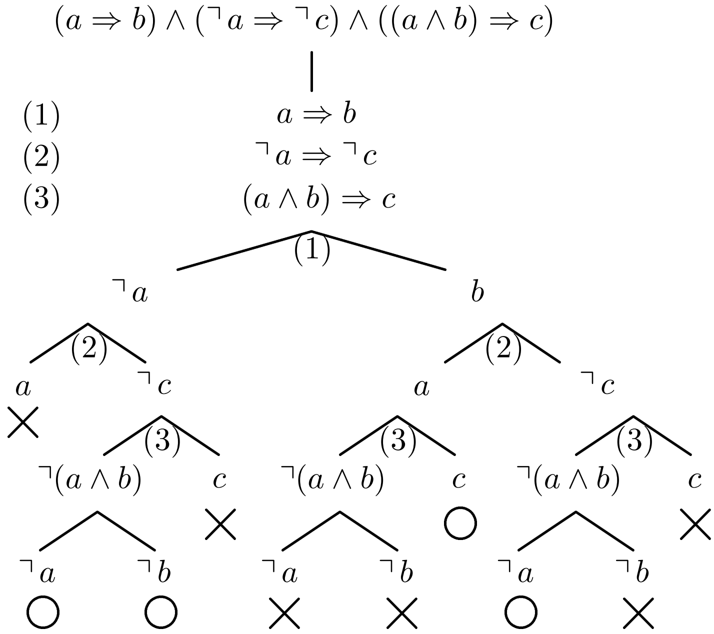
Modely teórií

Definícia. Ľubovoľnú neprázdnu množinu formúl nazývame **teória**. Nech je $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ teória. Ohodnotenie prvotných formúl ν, pre ktoré platí $\overline{\nu}(A_1) = \overline{\nu}(A_2) = \cdots = \overline{\nu}(A_n) = 1$, nazývame **model** (**interpretácia**) teórie $\mathcal{M}$.

Modely teórie $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ vieme nájsť pomocou otvorených vetiev sémantického stromu pre $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$. Všimnime si súvis medzi splniteľnosťou množiny formúl $\mathcal{M}$ a modelom teórie $\mathcal{M}$.

Príklad. Zostrojte všetky modely teórie $\{a \Rightarrow b, \neg a \Rightarrow \neg c, (a \wedge b) \Rightarrow c\}$.

Sémantický strom pre formulu $(a \Rightarrow b) \wedge (\neg a \Rightarrow \neg c) \wedge ((a \wedge b) \Rightarrow c)$ je znázornený na Obrázku 7. Zistili sme, že táto formula je ekvivalentná s DNF-formulou $(\neg a \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c)$. Z prvej klauzuly získame model $\nu(a) = 0$ a $\nu(c) = 0$, čo skrátene zapíšeme $(0, \#, 0)$. Symbolom $\#$ na druhej pozícii zapisujeme, že hodnota druhej prvotnej formuly b nie je v tomto modeli stanovená, teda môžeme ju voliť ako 0, tak 1. Z ďalších klauzúl dostávame modely $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ a $(0, 1, 0)$. Keď to zjednodušíme, modely danej teórie sú $(0, \#, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

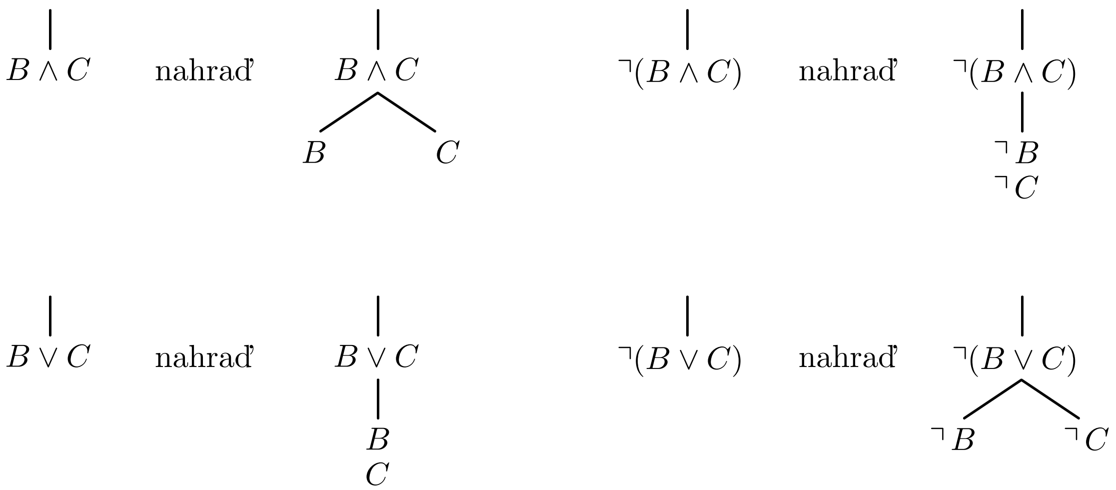


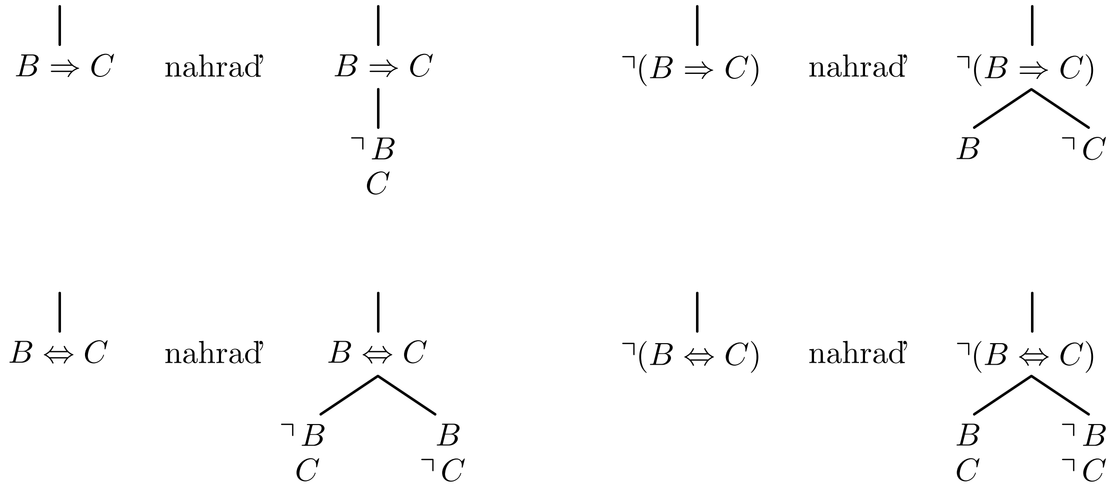
Obrázok 7

Duálne sémantické stromy

Pomocou duálnych sémantických stromov konštruujeme konjunktívny normálny tvar danej formuly. Používame na to pravidlá zobrazené na Obrázku 8.

Podobne ako pri (primárnych) sémantických stromoch, vetva duálneho sémantického stromu je **uzavretá** ak obsahuje dvojicu komplementárnych literálov. Ak vetva neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov, nazýva sa **otvorená**. Uzavreté vetvy značíme symbolom × a otvorené symbolom ○.

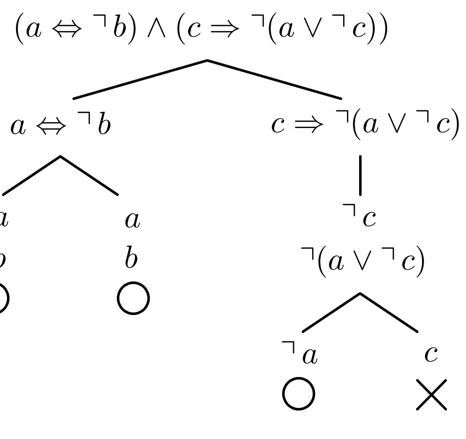




Obrázok 8

PRÍKLAD. Zostrojte KNF-formulu ekvivalentnú s A: $(a \Leftrightarrow \neg b) \wedge (c \Rightarrow \neg(a \vee \neg c))$.

Všimnime si, že DNF-formulu ekvivalentnú s A sme zostrojili v Príklade 4.1. Duálny sémantický strom pre A je znázornený na Obrázku 9. Čiže KNF-formula $(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c)$ je ekvivalentná s A.



Obrázok 9

Podobne ako pri (primárnych) sémantických stromoch vieme pomocou Vety 4.2 sformulovať nasledujúcu analógiu Viet 4.3 a 4.4.

VETA 4.5.

(1) *Formula A je kontradikciou práve vtedy, keď sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté.*
(2) *Formula A je tautológiou práve vtedy, keď sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre A uzavreté.*
(3) *Formula A je splniteľná práve vtedy, keď je aspoň jedna vetva duálneho sémantického stromu pre $\neg A$ otvorená.*

(4) *Množina formúl* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *je splniteľná práve vtedy, keď je aspoň jedna vetva duálneho sémantického stromu pre* $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ *otvorená.*

(5) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ *práve vtedy, keď sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre* $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ *uzavreté.*

(6) *Formuly* A *a* B *sú ekvivalentné práve vtedy, keď sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre* $A \Leftrightarrow B$ *uzavreté.*

Cvičenia

Cvičenie 4.1. V tejto kapitole sme skonštruovali viacero sémantických stromov. Zmeňte poradie rozvíjania vetiev (čiže použite komutatívny zákon) a zostrojte odlišné stromy. Zmenia sa nejako výsledky?

Cvičenie 4.2. Pomocou sémantických stromov preveďte nasledujúce formuly na DNF-formuly.

a) $(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (a \vee b)$
b) $\neg((a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow a))$
c) $(a \wedge c) \Rightarrow (\neg b \vee c)$
d) $(a \Leftrightarrow (b \wedge \neg c)) \Rightarrow ((\neg b \vee c) \wedge a)$
e) $(a \wedge \neg a) \Rightarrow b$
f) $(a \Leftrightarrow b) \wedge (\neg a \Leftrightarrow b)$

Cvičenie 4.3. Pomocou duálnych sémantických stromov preveďte všetky formuly z Cvičenia 4.2 na KNF-formuly.

Cvičenie 4.4. Pomocou sémantických stromov dokážte, že sú axiómy A1, A2 a A3 z Kapitoly 2 tautológie.

Cvičenie 4.5. Pomocou sémantických stromov zistite, či sú nasledujúce formuly splniteľné.

a) $a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg a)$
b) $(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (\neg a \vee b)$
c) $\neg(a \vee c) \vee ((b \vee c) \Rightarrow a)$
d) $(a \wedge b \wedge \neg c) \Rightarrow \neg(a \Rightarrow (b \vee c))$

Cvičenie 4.6. Pomocou sémantických stromov zistite, či je formula A tautologickým dôsledkom množiny formúl $\mathcal{M}$.

a) $\mathcal{M} = \{a \wedge b,\ \neg c \Rightarrow a\}$ A: $\neg b \Rightarrow c$
b) $\mathcal{M} = \{a \Rightarrow b,\ a \Rightarrow \neg c,\ c \vee \neg b\}$ A: $b \Rightarrow c$
c) $\mathcal{M} = \{a \vee b,\ \neg(a \wedge \neg b),\ b \Rightarrow c\}$ A: $a \Rightarrow c$

Cvičenie 4.7. Pomocou sémantických stromov zistite, či sú nasledujúce formuly ekvivalentné.

a) $a \Rightarrow b$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$
b) $a \Rightarrow \neg b$ a $\neg b \Rightarrow a$
c) $a \Rightarrow a$ a $\neg c \Rightarrow (c \Rightarrow b)$
d) $a \vee b$ a $a \Leftrightarrow (b \vee \neg a)$

Cvičenie 4.8. Vyriešte úlohy z Cvičení 4.4 až 4.7 pomocou duálnych sémantických stromov.

Cvičenie 4.9. Pomocou sémantických stromov nájdite všetky modely nasledujúcich teórií.

a) $a \Rightarrow b,\ a \Rightarrow c,\ c \Leftrightarrow a$

b) $(a \vee b) \Rightarrow c,\ \neg a \vee \neg c,\ c \vee \neg b,\ b \Rightarrow a$

c) $a \Leftrightarrow b,\ \neg b \vee c,\ a \wedge \neg c$

d) $a \vee b,\ c \Rightarrow a,\ a \Rightarrow (b \vee c)$

5 Rezolučná metóda

V tejto kapitole sa budeme zaoberať rezolučnou metódou, ktorá tvorí základ programovacieho jazyka Prolog pre logické programovanie. Pomocou tejto metódy určíme, či je KNF-formula kontradikcia alebo je splniteľná. V druhom prípade nájdeme pre formulu model (realizáciu, implementáciu). Pripomeňme ešte, že keď v kaluzulách nepripúšťame komplementárne literály, tak KNF-formula nemôže byť tautológia.

Rezolventa

DEFINÍCIA. Nech sú C_1 a C_2 klauzuly KNF-formuly, pričom C_1 má tvar $C_1' \vee l$ a C_2 má tvar $C_2' \vee \neg l$, kde l je nejaký literál. Potom $C_1' \vee C_2'$ nazývame **rezolventa** C_1 a C_2 vzhľadom na literál l.

Platí nasledujúce tvrdenie.

VETA 5.1 (**metóda rezolventy**). *Nech sú C_1 a C_2 klauzuly KNF-formuly, pričom C_1 je $C_1' \vee l$ a C_2 je $C_2' \vee \neg l$. Potom*

$$\models \ \big((C_1' \vee l) \wedge (C_2' \vee \neg l)\big) \Rightarrow (C_1' \vee C_2') \,.$$

DÔKAZ. Prepíšme si disjunkcie v klauzulách na implikácie. Keďže medzi $\models$ a $\vdash$ nie je rozdiel, máme dokázať

$$\vdash \ \big((\neg C_1' \Rightarrow l) \wedge (l \Rightarrow C_2')\big) \Rightarrow (\neg C_1' \Rightarrow C_2') \,,$$

čo je tvrdenie plynúce z pravidla sylogizmu a Vety 2.13. $\square$

Z Vety 5.1 možno odvodiť postup, ktorým zistíme, či je daná KNF-formula A kontradikcia. Budeme robiť rezolventy klauzúl a keď zostrojíme prázdnu klauzulu, ktorú označujeme symbolom $\boxdot$, tak je A kontradikcia. Ak prázdnu klauzulu nezostrojíme a množina klauzúl sa už nebude zväčšovať, tak je A splniteľná.

Všimnime si, že takýto postup je konečný. Totiž ak sa v A vyskytuje n prvotných formúl, tak počet rôznych klauzúl s i literálmi je 1 ak $i = 0$ a $\binom{n}{i}2^i$ ak $1 \leq i \leq n$. Z toho plynie, že počet rôznych klauzúl je (použijeme binomickú vetu)

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i 1^{n-i} = 3^n.$$

Postup si ukážeme na nasledujúcom príklade.

PRÍKLAD 5.1. Zistite, či je KNF-formula A splniteľná.

$$A: \ (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (a \vee c) \wedge (\neg a \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg d)$$

Budeme postupovať tak, že v prvom kroku zostrojíme všetky možné rezolventy piatich klauzúl A. Týmto spôsobom získame väčšiu množinu klauzúl. V ďalšom kroku zostrojíme rezolventy tejto väčšej množiny klauzúl a postup opakujeme dovtedy, kým nedostaneme všetky možné rezolventy, respektíve kým nezískame prázdnu klauzulu $\boxdot$.

V Tabuľke 1 uvádzame číslo novej klauzuly a čísla tých starých klauzúl, ktorých rezolventou sme novú klauzulu získali. Okrem toho sme tabuľku horizontálnymi čiarami rozdelili na časti podľa toho, v ktorom kroku príslušné rezolventy vznikli.

číslo	klauzula	rezolventa	krok
1	$a \vee \neg b$		0
2	$b \vee \neg c$		
3	$a \vee c$		
4	$\neg a \vee d$		
5	$\neg a \vee \neg d$		
6	$a \vee \neg c$	1,2	1
7	$\neg b \vee d$	1,4	
8	$\neg b \vee \neg d$	1,5	
9	$a \vee b$	2,3	
10	$c \vee d$	3,4	
11	$c \vee \neg d$	3,5	
12	$\neg a$	4,5	
13	a	1,9	2
14	$\neg b$	1,12	
15	$\neg c \vee d$	2,7	
16	$\neg c \vee \neg d$	2,8	
17	$b \vee d$	2,10	
18	$b \vee \neg d$	2,11	
19	a	3,6	

číslo	klauzula	rezolventa	krok
20	c	3,12	2
21	$\neg c \vee d$	4,6	
22	$\neg a \vee \neg b$	4,8	
23	$b \vee d$	4,9	
24	$\neg a \vee c$	4,11	
25	$\neg c \vee \neg d$	5,6	
26	$\neg a \vee \neg b$	5,7	
27	$b \vee \neg d$	5,9	
28	$\neg a \vee c$	5,10	
29	$a \vee d$	6,10	
30	$a \vee \neg d$	6,11	
31	$\neg c$	6,12	
32	$\neg b$	7,8	
33	$\neg a \vee d$	7,9	
34	$\neg b \vee c$	7,11	
35	$a \vee \neg d$	8,9	
36	$\neg b \vee c$	8,10	
37	b	9,12	
38	c	10,11	

Tabuľka 1

V ďalšom, treťom kroku, získame $\boxdot$ ako rezolventu $14, 37$, respektíve $20, 31$. Znamená to, že A je kontradikcia.

POZNÁMKA. Všimnime si dôkladne znenie Vety 5.1. Mohli by sme iba na základe tejto vety tvrdiť, že A je splniteľná keď v žiadnom kroku nedostaneme prázdnu klauzulu $\boxdot$? Tento problém vyriešime vo Vete 5.2

Metóda rezolventy

Postup v Príklade 5.1 je veľmi prácny a neprehľadný, preto ho v ďalšom zmeníme. Avšak najprv si všimnime, že ak máme klauzulu, v ktorej sa vyskytuje prvotná formula aj jej negácia, tak takúto klauzulu môžeme okamžite vynechať, pretože je vždy pravdivá. Podobne, ak má klauzula viac výskytov literálu l, tak ju možno nahradiť jednoduchšou klauzulou s jediným výskytom l.

Algoritmus 5.1. Nech je T množina klauzúl KNF-formuly A a nech je p prvotná formula, ktorá sa vyskytuje v A. Rozdelíme si množinu T na tri podmnožiny $T_0(p)$, $T_1(p)$ a $T_2(p)$:

$T_0(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré neobsahujú p.
$T_1(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré obsahujú literál p.
$T_2(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré obsahujú literál $\neg p$.

Zostrojíme množinu $T_{1,2}(p)$, ktorá obsahuje všetky možné rezolventy množiny T vzhľadom na p. To znamená, že $T_{1,2}$ obsahuje rezolventy C_1 a C_2 pre každé C_1 z $T_1(p)$ a C_2 z $T_2(p)$.

Položíme $\tilde{T}(p) = T_0(p) \cup T_{1,2}(p)$, čím sme ukončili jednu iteráciu algoritmu. V ďalšom pokračujeme s novou množinou $T := \tilde{T}(p)$.

Korektnosť Algoritmu 5.1 dokážeme v nasledujúcej vete.

Veta 5.2. *Množina klauzúl T KNF-formuly je splniteľná práve vtedy, keď je splniteľná množina $\tilde{T}(p)$. Ak sú tieto množiny splniteľné, tak majú spoločný model.*

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že je splniteľná množina T. Potom existuje ohodnotenie prvotných formúl ν také, že $\overline{\nu}(B) = 1$ pre každú klauzulu B z T. Teraz nech $C \in \tilde{T}(p)$. Ak $C \in T_0(p)$, tak $C \in T$ a podľa predchádzajúceho $\overline{\nu}(C) = 1$. Preto predpokladajme, že $C \in T_{1,2}(p)$. Potom C je $C_1 \vee C_2$, kde $C_1 \vee p$ je klauzula z $T_1(p)$ a $C_2 \vee \neg p$ je klauzula z $T_2(p)$. Uvažujme dva prípady.

(a) $\nu(p) = 0$. Keďže $(C_1 \vee p) \in T$ a $\overline{\nu}(C_1 \vee p) = 1$, tak $\overline{\nu}(C_1) = 1$, čo znamená, že aj $\overline{\nu}(C_1 \vee C_2) = 1$. Preto $\overline{\nu}(C) = 1$.
(b) $\nu(p) = 1$. Potom $\overline{\nu}(\neg p) = 0$. Keďže $(C_2 \vee \neg p) \in T$ a $\overline{\nu}(C_2 \vee \neg p) = 1$, tak $\overline{\nu}(C_2) = 1$, čo znamená, že aj $\overline{\nu}(C_1 \vee C_2) = 1$. Preto opäť $\overline{\nu}(C) = 1$.

Keďže vo všetkých prípadoch $C \in \tilde{T}(p)$ platí $\overline{\nu}(C) = 1$, tak ν je modelom $\tilde{T}(p)$.

Teraz predpokladajme, že je splniteľná množina $\tilde{T}(p)$. Potom $\tilde{T}(p)$ má model, povedzme ν. Keďže $\tilde{T}(p)$ neobsahuje prvotnú formulu p, potrebujeme ešte určiť $\nu(p)$. Nech

$$T_1(p) = \{A_1 \vee p,\ A_2 \vee p,\ \dots\ , A_{n_1} \vee p\},$$
$$T_2(p) = \{B_1 \vee \neg p,\ B_2 \vee \neg p,\ \dots\ , B_{n_2} \vee \neg p\}.$$

Všimnime si, že $A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, B_1, B_2, \dots, B_{n_2}$ neobsahujú prvotnú formulu p a podobne neobsahujú p ani klauzuly $T_0(p)$. Preto ak

$$\overline{\nu}(A_1) = \overline{\nu}(A_2) = \cdots = \overline{\nu}(A_{n_1}) = \overline{\nu}(B_1) = \overline{\nu}(B_2) = \cdots = \overline{\nu}(B_{n_2}) = 1,$$

tak môžeme $\nu(p)$ zvoliť ľubovoľne a získame model T. Predpokladajme preto, že buď $\overline{\nu}(A_i) = 0$ alebo $\overline{\nu}(B_j) = 0$ pre nejaké i respektíve j, $1 \leq i \leq n_1$ a $1 \leq j \leq n_2$. Rozoberieme obidva prípady.

(a) $\overline{\nu}(A_i) = 0$. Keďže $\tilde{T}(p)$ obsahuje klauzuly $A_i \vee B_1$, $A_i \vee B_2, \dots, A_i \vee B_{n_2}$ a ν je model $\tilde{T}(p)$, tak platí $\overline{\nu}(B_1) = \overline{\nu}(B_2) = \cdots = \overline{\nu}(B_{n_2}) = 1$. Preto si zvolíme $\nu(p) = 1$. Ukážeme, že takto rozšírené ν je modelom T. Ak $C \in T_0(p)$ tak $C \in \tilde{T}(p)$, čo znamená že $\overline{\nu}(C) = 1$. Ak $C \in T_1(p)$ tak C má tvar $A_k \vee p$ pre nejaké k a keďže $\nu(p) = 1$, dostávame $\overline{\nu}(C) = 1$. Na záver ak $C \in T_2(p)$ tak C má tvar $B_k \vee \neg p$. Keďže $\overline{\nu}(B_k) = 1$, tak aj v tomto prípade platí $\overline{\nu}(C) = 1$.

(b) $\overline{\nu}(B_j) = 0$. Teraz $\overline{\nu}(A_1 \vee B_j) = \overline{\nu}(A_2 \vee B_j) = \cdots = \overline{\nu}(A_{n_1} \vee B_j) = 1$, pretože ν je model $\tilde{T}(p)$. To znamená, že $\overline{\nu}(A_1) = \overline{\nu}(A_2) = \cdots = \overline{\nu}(A_{n_1}) = 1$. Preto si zvolíme $\nu(p) = 0$ a ukážeme, že takto rozšírené ν je modelom T. Ak $C \in T_0(p)$ tak $C \in \tilde{T}(p)$ a $\overline{\nu}(C) = 1$. Ak $C \in T_1(p)$ tak C má tvar $A_k \vee p$ a keďže $\nu(A_k) = 1$, tak $\overline{\nu}(C) = 1$. Na záver ak $C \in T_2(p)$ tak C má tvar $B_k \vee \neg p$ a keďže $\overline{\nu}(\neg p) = 1$, tak opäť $\overline{\nu}(C) = 1$.

Teda ak je ν modelom $\tilde{T}(p)$, vieme ho dodefinovať na p tak, že získame model T. $\square$

Všimnime si, že Veta 5.2 má už iný tvar, ako Veta 5.1. Z dôkazu je tiež zrejmé, ako rozšíriť model $\tilde{T}(p)$ na model T.

Použitie Algoritmu 5.1 predpokladá, že T obsahuje klauzuly, v ktorých sa vyskytuje literál p, a tiež klauzuly, v ktorých sa vyskytuje literál $\neg p$. Ináč povedané predpokladáme, že sú $T_1(p)$ a $T_2(p)$ neprázdne. Tento predpoklad však nie je nutný. Totiž ak je $T_1(p)$ alebo $T_2(p)$ prázdnou množinou, tak T má model práve vtedy, keď ho má $T_0(p)$. Pritom ak je prázdnou $T_1(p)$, tak na rozšírenie modelu $T_0(p)$ na T stačí položiť $\nu(p) = 0$; a ak je prázdnou $T_2(p)$, tak na rozšírenie modelu $T_0(p)$ na T stačí položiť $\nu(p) = 1$. Je zrejmé, že prípad keď sú prázdne $T_1(p)$ aj $T_2(p)$ nemá zmysel rozoberať, pretože to znamená, že p sa v klauzulách množiny T nevyskytuje.

Príklady

Teraz si ukážeme použitie Algoritmu 5.1 na dvoch príkladoch. Porovnajte prácnosť s Príkladom 5.1.

Príklad. Je splniteľná KNF-formula A? Ak je splniteľná, nájdite jej model.

$$A: \ (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (a \vee c) \wedge (\neg a \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg d)$$

Budeme postupovať podľa Algoritmu 5.1. Označme symbolom T množinu klauzúl formuly A.

(1) Zvolíme si prvotnú formulu a. Potom $T_0(a) = \{b \vee \neg c\}$, $T_1(a) = \{a \vee \neg b,\ a \vee c\}$ a $T_2(a) = \{\neg a \vee d,\ \neg a \vee b \vee \neg d\}$. To značí, že $T_{1,2}(a) = \{\neg b \vee d,\ c \vee d,\ \neg b \vee b \vee \neg d,\ c \vee b \vee \neg d\}$. Je zrejmé, že klauzula $b \vee \neg b \vee d$ je splnená vždy, preto ju možno vynechať. Dostávame $\tilde{T}(a) = \{b \vee \neg c,\ \neg b \vee d,\ c \vee d,\ b \vee c \vee \neg d\}$.

(2) Zvolíme si prvotnú formulu b. Potom
$T_0(b) = \{c \vee d\}$, $T_1(b) = \{b \vee \neg c,\ b \vee c \vee \neg d\}$ a $T_2(b) = \{\neg b \vee d\}$.
To značí, že $T_{1,2}(b) = \{\neg c \vee d,\ c \vee \neg d \vee d\}$, a preto $\tilde{T}(b) = \{c \vee d,\ \neg c \vee d\}$.

(3) Zvolíme si prvotnú formulu c. Potom
$T_0(c) = \emptyset$, $T_1(c) = \{c \vee d\}$ a $T_2(c) = \{\neg c \vee d\}$.
To značí, že $T_{1,2}(c) = \{d\}$ a $\tilde{T}(c) = \{d\}$.

(4) Zvolíme si prvotnú formulu d. Potom
$T_0(d) = \emptyset$, $T_1(d) = \{d\}$ a $T_2(d) = \emptyset$. Podľa poznámky za Vetou 5.2 dostávame $\tilde{T}(d) = T_0(d) = \emptyset$.

Získali sme prázdnu množinu klauzúl, avšak nie prázdnu klauzulu. Znamená to, že A je splniteľná formula. Teraz spätne nájdeme jej model ν.

(4) Keďže $T_2(d) = \emptyset$, volíme $\nu(d) = 1$.

(3) Tu $T_1(c)$ aj $T_2(c)$ majú po jednej klauzuli, pričom tieto sú tvaru $c \vee d$ a $\neg c \vee d$. Keďže $\nu(d) = 1$, máme $\overline{\nu}(c \vee d) = \overline{\nu}(\neg c \vee d) = 1$ bez ohľadu na to, ako zvolíme $\nu(c)$. Znamená to, že $\nu(c)$ môžeme zvoliť ľubovoľne. Zvoľme si napríklad $\nu(c) = 0$.

(2) Tu $T_1(b)$ má klauzuly $b \vee \neg c$ a $b \vee (c \vee \neg d)$, zatiaľ čo $T_2(b)$ má jedinú klauzulu $\neg b \vee d$. Máme $\overline{\nu}(\neg c) = 1$ a $\overline{\nu}(c \vee \neg d) = 0$. Zvolíme preto $\nu(b) = 1$.

(1) Tu $T_1(a)$ má klauzuly $a \vee \neg b$ a $a \vee c$, zatiaľ čo $T_2(a)$ má klauzuly $\neg a \vee d$ a $\neg a \vee (b \vee \neg d)$. Máme $\overline{\nu}(\neg b) = 0$ a $\overline{\nu}(c) = 0$. Zvolíme preto $\nu(a) = 1$.

Získali sme model $(1, 1, 0, 1)$ (ohodnotenia sú v poradí $(\nu(a), \nu(b), \nu(c), \nu(d))$).

Aký model dostaneme, keď si v kroku (3) zvolíme $\nu(c) = 1$?

Príklad. Je splniteľná KNF-formula A? Ak je splniteľná, nájdite jej model.

$$A:\ (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (a \vee c) \wedge (\neg a \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg d)$$

Označme T množinu klauzúl formuly A. Nemusíme nutne postupovať v poradí od a po d, môžeme si zvoliť aj iné poradie.

(1) Zvolíme si d. Potom
$T_0(d) = \{a \vee \neg b,\ b \vee \neg c,\ a \vee c\}$, $T_1(d) = \{\neg a \vee d\}$ a $T_2(d) = \{\neg a \vee \neg d\}$.
Preto $T_{1,2}(d) = \{\neg a\}$ a $\tilde{T}(d) = \{a \vee \neg b,\ b \vee \neg c,\ a \vee c,\ \neg a\}$.

(2) Zvolíme si a. Potom
$T_0(a) = \{b \vee \neg c\}$, $T_1(a) = \{a \vee \neg b,\ a \vee c\}$ a $T_2(a) = \{\neg a\}$.
Preto $T_{1,2}(a) = \{\neg b,\ c\}$ a $\tilde{T}(a) = \{b \vee \neg c,\ \neg b,\ c\}$.

(3) Zvolíme si c. Potom $T_0(c) = \{\neg b\}$, $T_1(c) = \{c\}$ a $T_2(c) = \{b \vee \neg c\}$.
Preto $T_{1,2}(c) = \{b\}$ a $\tilde{T}(c) = \{\neg b,\ b\}$.

(4) Zvolíme si b. Potom $T_0(b) = \emptyset$, $T_1(b) = \{b\}$ a $T_2(b) = \{\neg b\}$.
Preto $T_{1,2}(b) = \{\boxdot\}$ a $\tilde{T}(b) = \{\boxdot\}$.

V poslednej iterácii sme získalli prázdnu formulu, preto A nie je splniteľná. Teda A je kontradikcia, čo sme zistili už v Príklade 5.1.

Metóda duálnej rezolventy

Touto metódou zistíme, či je DNF-formula tautológia.

DEFINÍCIA. Nech sú C_1 a C_2 klauzuly DNF-formuly, pričom C_1 má tvar $C_1' \wedge l$ a C_2 má tvar $C_2' \wedge \neg l$, kde l je nejaký literál. Potom $C_1' \wedge C_2'$ nazývame **duálna rezolventa** C_1 a C_2 vzhľadom na literál l.

Opäť, prázdnu klauzulu označíme symbolom $\boxdot$. Ak ju zostrojíme, tak DNF-formula je tautológia.

Algoritmus bude analogický algoritmu (primárnej) rezolučnej metódy s tým rozdielom, že teraz nebudeme hľadať ohodnotenia ν, ktoré sú modelom A, ale práve také ohodnotenia ν, pre ktoré $\overline{\nu}(A) = 0$. Avšak najprv si všimnime, že ak máme klauzulu, v ktorej sa vyskytuje prvotná formula aj jej negácia, tak takúto klauzulu môžeme okamžite vynechať, pretože nie je nikdy splnená. Podobne, ak má klauzula viac výskytov literálu l, tak ju možno nahradiť jednoduchšou klauzulou s jediným výskytom l.

ALGORITMUS 5.2. Nech je T množina klauzúl DNF-formuly A a nech je p prvotná formula, ktorá sa vyskytuje v A. Rozdelíme si množinu T na tri podmnožiny $T_0(p)$, $T_1(p)$ a $T_2(p)$:

$T_0(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré neobsahujú p.
$T_1(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré obsahujú literál p.
$T_2(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré obsahujú literál $\neg p$.

Zostrojíme množinu $T^d_{1,2}(p)$, ktorá obsahuje všetky možné duálne rezolventy množiny T vzhľadom na p. To znamená, že $T^d_{1,2}$ obsahuje duálne rezolventy C_1 a C_2 pre každé C_1 z $T_1(p)$ a C_2 z $T_2(p)$.

Položíme $\tilde{T}^d(p) = T_0(p) \cup T^d_{1,2}(p)$, čím sme ukončili jednu iteráciu algoritmu. V ďalšom pokračujeme s novou množinou $T := \tilde{T}^d(p)$.

Platí nasledujúce tvrdenie.

VETA 5.3. *Nech je T množina klauzúl DNF-formuly a nech je p prvotná formula, ktorá sa vyskytuje v T. Potom existuje ohodnotenie ν ktoré nie je modelom T práve vtedy, keď existuje ohodnotenie μ, ktoré nie je modelom $\tilde{T}^d(p)$. Tieto ohodnotenia možno zostrojiť tak, že $\mu(q) = \nu(q)$ pre každú prvotnú formulu q rôznu od p.*

Dôkaz Vety 5.3 je analogický dôkazu Vety 5.2. Postup Algoritmu 5.2 si objasníme na dvoch príkladoch.

PRÍKLAD. Pomocou metódy duálnej rezolventy ukážte, že je A tautológia.

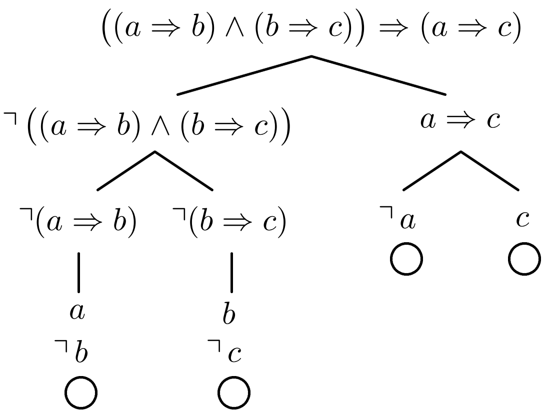
$$A: \ \big((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)\big) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$$

Najprv si prepíšeme A do disjunktívneho normálneho tvaru. Na to môžeme použiť sémantický strom, pozri Obrázok 10.

Zistili sme, že $(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee (\neg a) \vee (c)$ je DNF-formula ekvivalentná s A. Teraz označme $T = \{a \wedge \neg b,\ b \wedge \neg c,\ \neg a,\ c\}$. Budeme postupovať podľa Algoritmu 5.2 pre duálnu rezolučnú metódu.

(1) Zvolíme si a. Potom $T_0(a) = \{b \wedge \neg c,\ c\}$, $T_1(a) = \{a \wedge \neg b\}$ a $T_2(a) = \{\neg a\}$. Preto $T^d_{1,2}(a) = \{\neg b\}$ a $\tilde{T}^d(a) = \{b \wedge \neg c,\ c,\ \neg b\}$.
(2) Zvolíme si b. Potom $T_0(b) = \{c\}$, $T_1(b) = \{b \wedge \neg c\}$ a $T_2(b) = \{\neg b\}$. Preto $T^d_{1,2}(b) = \{\neg c\}$ a $\tilde{T}^d(b) = \{c,\ \neg c\}$.
(3) Zvolíme si c. Potom $T_0(c) = \emptyset$, $T_1(c) = \{c\}$ a $T_2(c) = \{\neg c\}$. Z toho dostávame $T^d_{1,2}(c) = \{\boxdot\}$ a $\tilde{T}^d(c) = \{\boxdot\}$.

Získali sme prázdnu klauzulu $\boxdot$, takže A je tautológia.



Obrázok 10

Príklad. Pomocou duálnej rezolventy zistite, či je formula A: $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ tautológia. Ak nie je, nájdite ohodnotenie ν, pre ktoré $\overline{\nu}(A) = 0$.

Označme T množinu klauzúl formuly A a postupujeme podľa Algoritmu 5.2.

(1) Zvolíme si a. Potom $T_0(a) = \emptyset$, $T_1(a) = \{a \wedge b\}$ a $T_2(a) = \{\neg a \wedge \neg b\}$. Preto $T^d_{1,2}(a) = \{b \wedge \neg b\}$ a $\tilde{T}^d(a) = \emptyset$, pretože klauzula $b \wedge \neg b$ je nadbytočná.

Znamená to, že formula A nie je tautológia. Naviac, pre ľubovoľné $\nu(b)$ vieme ν rozšíriť na ohodnotenie, pre ktoré $\overline{\nu}(A) = 0$. Zvoľme si povedzme $\nu(b) = 1$. Potom $\overline{\nu}(a \wedge b)$ zatiaľ nevieme určiť, avšak $\overline{\nu}(\neg a \wedge \neg b) = 0$. To značí, že ak chceme získať ohodnotenie ν pre ktoré $\overline{\nu}(A) = 0$, musíme voliť $\nu(a) = 0$ aby platilo $\overline{\nu}(a \wedge b) = 0$. Dostali sme ohodnotenie ν, kde $\nu(a) = 0$ a $\nu(b) = 1$, pre ktoré $\overline{\nu}(A) = 0$.

Aké ohodnotenie dostaneme v predchádzajúcom príklade, keď si zvolíme možnosť $\nu(b) = 0$?

Množiny a výroky

Na záver tejto kapitoly si ukážeme súvis výrokovej logiky s teóriou množín. Majme zvolené nejaké *univerzum*, čiže nejakú množinu objektov $\mathcal{U}$. Všetky naše množiny budú časťou $\mathcal{U}$.

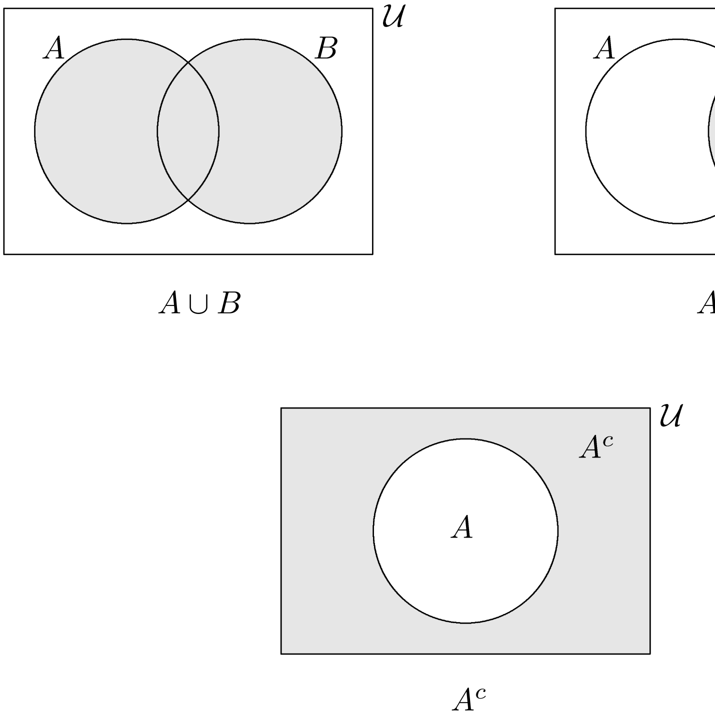
Definícia. Nech sú A a B množiny (podmnožiny univerza $\mathcal{U}$).

(a) Výrazom A^c označujeme **komplement** A v $\mathcal{U}$, čiže množinu všetkých objektov $\mathcal{U}$, ktoré nie sú v A.

(b) Výrazom $A \cup B$ označujeme **zjednotenie** A a B, čiže množinu všetkých objektov, ktoré sú v A alebo B.

(c) Výrazom $A \cap B$ označujeme **prienik** A a B, čiže množinu všetkých objektov, ktoré sú v A aj B zároveň.

Množiny možno znázorniť pomocou Vennových diagramov. V nich sú množiny (časti univerza) uzavreté oblasti roviny, pričom body (objekty) ležiace vnútri uzavretej oblasti sú prvkami príslušnej množiny, zatiaľ čo body (objekty) ležiace mimo uzavretej oblasti do množiny nepatria. Na Obrázku 11 máme sivo zafarbené množiny $A \cup B$, $A \cap B$ a A^c.



Obrázok 11

Platí nasledujúce tvrdenie:

Veta 5.4. *Nech sú A, B a C ľubovoľné množiny. Potom platí:*

(a)	$A \cup A = A$ *a* $A \cap A = A$	*idempotentnosť*
(b)	$A \cup B = B \cup A$ *a* $A \cap B = B \cap A$	*komutatívnosť*
(c)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	*asociatívnosť*
(d)	$A \cap (A \cup B) = A$ *a* $A \cup (A \cap B) = A$	*absorbcia*
(e)	$A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
	$A \cup (B \cap (A \cup C)) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	*modulárnosť*

(f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *distributívnosť*

(g) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ *a* $A \cap \emptyset = \emptyset$ *zákony nuly*

(h) $A \cup \emptyset = A$ *a* $A \cap \mathcal{U} = A$ *zákony jednotky*

(i) $A \cap A^c = \emptyset$ *a* $A \cup A^c = \mathcal{U}$ *zákony doplnku*

(j) $(A^c)^c = A$ *involúcia*

(k) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *de Morganove pravidlá*

Všimnime si tvrdenia Vety 5.4. Napríklad posledné tvrdenie (k) je analógiou de Morganových pravidiel pre výroky a dokonca sa aj rovnako nazýva. Podobne je to s ostatnými tvrdeniami. Tento súvis množín s výrokmi nie je náhodný.

Majme výrokovú formulu A. Zostrojíme z nej množinu A_M. Najprv každú ekvivalenciu $P \Leftrightarrow Q$ v A nahradíme výrazom $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ a vzápätí každú implikáciu $R \Rightarrow S$ nahradíme výrazom $\urcorner R \vee S$. Takto získame formulu A_0, ktorá je ekvivalentná s A, ale obsahuje iba negácie, konjunkcie a disjunkcie.

Nech sú $p_1, p_2, \ldots, p_n$ všetky prvotné formuly A_0. Vezmime n rôznych množín $P_1, P_2, \ldots, P_n$, ktoré sú vo všeobecnej polohe (teda $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sa pretínajú tak, že delia univerzum $\mathcal{U}$ na 2^n neprázdnych častí) a nahraďme všetky výskyty symbolu p_i v A_0 symbolom P_i, kde $1 \leq i \leq n$. Ďalej nahraďme každý výskyt symbolu $\wedge$ symbolom $\cap$ a každý výskyt symbolu $\vee$ symbolom $\cup$. Na záver, všetky výrazy $\urcorner Q$ nahraďme výrazmi Q^c. Označme symbolom A_M to, čo sme takýmto spôsobom z A získali.

Príklad 5.2. Pre formulu $Q: \ (a \Leftrightarrow \urcorner b) \wedge (c \Rightarrow \urcorner(a \vee \urcorner c))$ zostrojte Q_M.

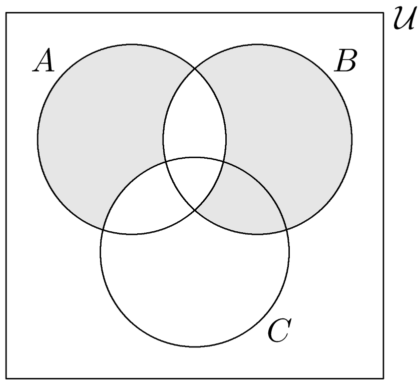
Najprv prepíšeme ekvivalencie a implikácie, čím získame

$$Q_0 : \ \big((\urcorner a \vee \urcorner b) \wedge (\urcorner\urcorner b \vee a)\big) \wedge \big(\urcorner c \vee \urcorner(a \vee \urcorner c)\big).$$

Teraz si zvolíme tri množiny A, B a C vo všeobecnej polohe a nahradením symbolov $\wedge$, $\vee$ a $\urcorner$ získame výraz

$$Q_M : \ \big((A^c \cup B^c) \cap ((B^c)^c \cup A)\big) \cap \big(C^c \cup (A \cup C^c)^c\big),$$

ktorý je množinou. Overte, že Q_M zodpovedá vytieňovanej oblasti na Obrázku 12.



Obrázok 12

Porovnajte Príklad 5.2 s Príkladom 4.1 a Obrázok 12 s DNF-formulou ekvivalentnou s Q. Ako vidno, DNF-formulu ekvivalentnú s Q vieme určiť pomocou množiny Q_M.

Z Vety 4.1 dostávame nasledujúce tvrdenie:

VETA 5.5. *Nech je A výroková formula. Potom platí*

(1) *A je kontradikcia práve vtedy, keď $A_M = \emptyset$, čiže keď je A_M prázdna množina.*
(2) *A je tautológia práve vtedy, keď $A_M = \mathcal{U}$, čiže keď sú všetky prvky univerza v A_M.*
(3) *A je splniteľná práve vtedy, keď $A_M \neq \emptyset$, čiže keď je A_M neprázdna.*

Podobne, z Vety 4.4 máme:

VETA 5.6.

(1) *Množina formúl $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je splniteľná práve vtedy, keď je množina $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)_M$ neprázdna, čiže keď majú $(A_1)_M, (A_2)_M, \ldots, (A_n)_M$ neprázdny prienik.*
(2) *$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ pre vtedy, keď je $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)_M$ prázdna množina, čiže keď majú množiny $(A_1)_M, (A_2)_M, \ldots, (A_n)_M, (B_M)^c$ prázdny prienik.*
(3) *Formuly A a B sú ekvivalentné práve vtedy, keď $(A \Leftrightarrow B)_M = \mathcal{U}$, čiže keď sú A_M a B_M rovnaké množiny.*

Cvičenia

CVIČENIE 5.1. Zostrojte rezolventy pre klauzuly.

a) $a \vee \neg b$ a $b \vee \neg c$
b) $\neg a \vee b \vee c$ a $a \vee b \vee \neg d$
c) $\neg a \vee \neg b$ a $a \vee b$
d) $\neg a \vee b \vee \neg d$ a $\neg b \vee c \vee d$

CVIČENIE 5.2. Rezolučnou metódou zistite, či sú nasledujúce KNF-formuly splniteľné. Ak sú, nájdite aspoň jeden model.

a) $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee b \vee c)$
b) $(a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (b)$
c) $(a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg c)$
d) $(a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (c \vee \neg a) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$
e) $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee \neg c)$
f) $(a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (b \vee \neg d)$

CVIČENIE 5.3. Rezolučnou metódou zistite, či je A tautologický dôsledok klauzúl množiny T. (Návod: Preveďte úlohu na problém určiť, či je KNF-formula kontradikciou.)

a) A: $\neg(a \vee b \vee c)$ $\quad T = \{a \vee b,\ a \vee c,\ b \vee c\}$
b) A: $a \vee b \vee c$ $\quad T = \{a \vee b,\ b \vee c,\ a \vee c\}$
c) A: $d \Rightarrow c$ $\quad T = \{a \vee \neg b,\ c \vee \neg d,\ b \vee d\}$
d) A: $\neg a \wedge \neg b$ $\quad T = \{a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow \neg a,\ b \Rightarrow a\}$

Cvičenie 5.4. Pomocou duálnej rezolučnej metódy zistite, či sú nasledujúce DNF-formuly tautológie. Ak nie sú, nájdite ohodnotenie, pre ktoré nadobúdajú pravdivostnú hodnotu 0.
a) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg a)$
b) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$
c) $(a \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$
d) $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

Cvičenie 5.5. Nech sú A, B a C výrokové formuly. Pomocou množín (teda pomocou Vennových diagramov) ukážte, že platia nasledujúce tvrdenia.
a) $\big(A \vee (B \vee C)\big) \Rightarrow \big((B \vee (A \vee C)) \vee A\big)$ je tautológia.
b) $(A \wedge \neg B) \wedge (A \Rightarrow B)$ je kontradikcia.
c) Množina formúl $\{A \vee \neg B,\ \neg A \vee C,\ \neg C \vee B,\ A \Rightarrow \neg B\}$ je splniteľná.
d) $\neg A \wedge \neg B$ a $\neg(A \vee B)$ sú ekvivalentné formuly.

6 Spínače, hradlá a logické neuróny

Booleove (logické) funkcie sme definovali už v Kapitole 1. Tieto funkcie môžeme zapísať výrokovými formulami pomocou logických spojok $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$, ale obyčajne ich zapisujeme pomocou operácií Booleovej algebry.

Booleova algebra

Definícia. **Booleova algebra** $\mathfrak{B} = (A; \cdot, +, \overline{}, 0, 1)$ je množina A s dvoma binárnymi operáciami $\cdot$ a $+$, jednou unárnou operáciou $\overline{}$ a konštantami 0 a 1, pričom pre všetky $x, y, z \in A$ platí:

(a)	$x + x = x$ a $x \cdot x = x$	idempotentnosť
(b)	$x + y = y + x$ a $x \cdot y = y \cdot x$	komutatívnosť
(c)	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	asociatívnosť
(d)	$x \cdot (x + y) = x$ a $x + (x \cdot y) = x$	absorbcia
(e)	$x \cdot (y + (x \cdot z)) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ $x + (y \cdot (x + z)) = (x + y) \cdot (x + z)$	modulárnosť
(f)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	distributívnosť
(g)	$x + 1 = 1$ a $x \cdot 0 = 0$	zákony nuly
(h)	$x + 0 = x$ a $x \cdot 1 = x$	zákony jednotky
(i)	$x \cdot \overline{x} = 0$ a $x + \overline{x} = 1$	zákony doplnku
(j)	$\overline{\overline{x}} = x$	involúcia
(k)	$\overline{(x + y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ a $\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$	de Morganove pravidlá

Poznamenajme, že nie všetky vzťahy z predchádzajúcej definície sú nutné, pozri Cvičenie 6.10.

Booleova algebra je špeciálna diskrétna štruktúra. Porovnajte vzťahy uvedené v definícii s Vetou 5.4. Z tohoto porovnania dostávame nasledujúce tvrdenie.

Veta 6.1. *Nech je M konečná množina. Potom množina všetkých podmnožín M spolu s operáciami prieniku, zjednotenia, doplnku, kde nula je $\emptyset$ a jednotka je M, tvorí Booleovu algebru.*

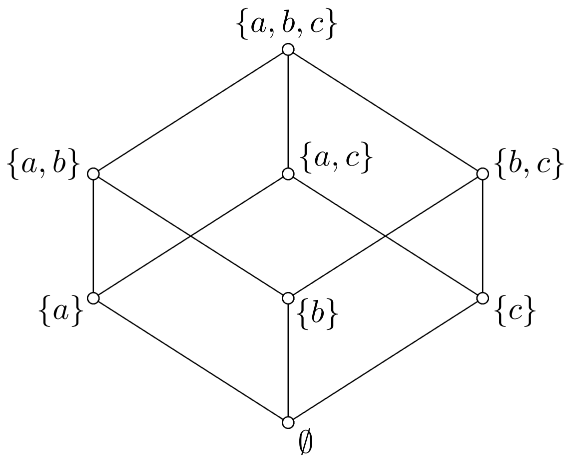
Booleovu algebru možno definovať aj ako zväz. Nech sú x a y prvky Booleovej algebry $\mathfrak{B} = (A; \cdot, +, \overline{}, 0, 1)$. Ak $x \cdot y = x$ (alebo ekvivalentne $x + y = y$), tak píšeme $x \leq y$. Relácia $\leq$ je čiastočné usporiadanie na množine A. Pripomeňme si definíciu zväzu z minulého semestra.

Definícia. Dvojica $(A; \leq)$ sa nazýva **zväz** ak je $\leq$ relácia čiastočného usporiadania na A a každé dva prvky x, y z A majú v A *infimum* (*priesek*), čiže najväčšie dolné ohraničenie, a *suprémum* (*spojenie*), čiže najmenšie horné ohraničenie.

Keďže pre $x \leq y$ platí $x \cdot y = x$ a $x + y = y$, tak priesek prvkov u a v môžeme definovať ako $u \cdot v$ a ich spojenie ako $u + v$. Potom $(A; \leq)$ tvorí *Booleovský zväz.*

Definícia. Zväz $(A; \leq)$ sa nazýva **Booleovský zväz**, ak je *distributívny* (teda v ňom pre priesek a spojenie platia distributívne zákony), obsahuje *najmenší* a *najväčší prvok* (má 0 a 1), a ku každému prvku x z A existuje v A *komplement* $\overline{x}$ (prvok spĺňajúci zákony doplnku).

Keď sa na Booleovu algebru pozrieme ako na zväz, môžeme pomocou Hasseho diagramu vizualizovať vzťahy medzi prvkami. Na Obrázku 13 máme Hasseho diagram Booleovej algebry, ktorú tvoria všetky podmnožiny trojprvkovej množiny $M = \{a, b, c\}$. Ako bolo uvedené vo Vete 6.1, nula je prázdna množina $\emptyset$ a jednotka celá množina $M = \{a, b, c\}$.



Obrázok 13

Všimnime si, že komplementom k $\{a\}$ je $\{b, c\}$ na Obrázku 13. To preto, lebo $\{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$ a $\{a\} \cup \{b, c\} = M$. Podobne sa dajú na Obrázku 13 identifikovať ďalšie dvojice komplementárnych prvkov.

Definícia. Majme Booleovu algebru $\mathfrak{B} = (A; \cdot, +, \overline{\ }, 0, 1)$. Prvok $a \in A$ je **atóm** ak $a \neq 0$ a zo vzťahu $x \leq a$ plynie, že buď $x = 0$ alebo $x = a$.

Podľa definície sú atómy najmenšie prvky väčšie ako 0. Znamená to, že sú v Hasseho diagrame umiestnené hneď nad 0 a sú s 0 spojené hranou. Booleova algebra, ktorej Hasseho diagram je na Obrázku 13, má tri atómy. Sú nimi prvky $\{a\}$, $\{b\}$ a $\{c\}$. Platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 6.1. *Keď má Booleova algebra t atómov, tak má presne 2^t prvkov a jej Hasseho diagramom je graf t-rozmernej kocky.*

Teraz si objasníme súvis formúl výrokovej logiky s výrazmi Booleovej algebry. V Kapitole 5 sme pre každú výrokovú formulu A zostrojili množinu A_M. Ak mala A presne n prvotných formúl $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tak A_M bola podmnožina univerza, ktoré delilo n množín $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vo všeobecnej polohe na 2^n častí.

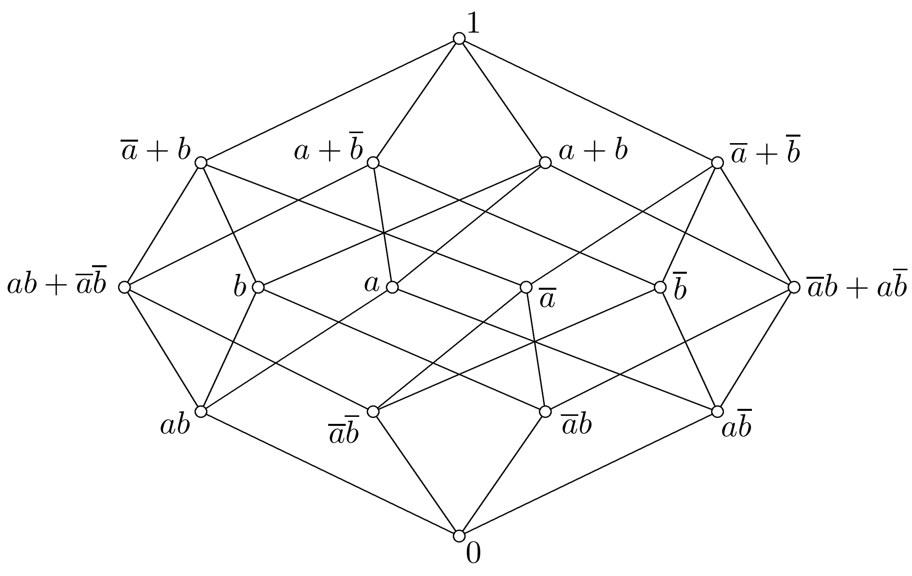
Nahraďme v A_M množiny P_i zodpovedajúce prvotným formulám symbolom x_i, kde $1 \leq i \leq n$. Okrem toho nahraďme všetky výskyty symbolu $\cap$ symbolom $\cdot$, všetky výskyty symbolu $\cup$ symbolom $+$ a nahraďme výrazy Q^c výrazmi $\overline{Q}$. Takýmto spôsobom dostaneme výraz v Booleovej algebre. Z vlastností množín je totiž zrejmé (pozri Veta 5.4), že získané výrazy spĺňajú podmienky z definície Booleovej algebry. Naviac, atómy Booleovej algebry budú prvky zodpovedajúce 2^n častiam, na ktoré delia univerzum množiny $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Znamená to, že atómy zodpovedajú výrazom $p_1^\nu \wedge p_2^\nu \wedge \ldots \wedge p_n^\nu$, kde ν je ohodnotenie prvotných formúl $p_1, p_2, \ldots, p_k$, pričom p_i^0 je $\neg p_i$ a p_i^1 je p_i (porovnaj s označením v dôkaze Vety 1.1 a Lemy 3.1).

Všimnime si, že keďže máme v našej Booleovej algebre 2^n atómov, spolu v nej máme presne 2^{2^n} prvkov, a to napriek tomu, že výrokových formúl s n prvotnými formulami je nekonečne veľa. Dôvodom je to, že ekvivalentné formuly reprezentuje jeden jediný prvok našej Booleovej algebry. Vidíme teda, že rôznych (neekvivalentných) výrokových formúl s n prvotnými formulami je iba 2^{2^n} (porovnaj s počtom Booleových funkcií n premenných z Kapitoly 1).

V ďalšom budeme z výrazov vynechávať symbol násobenia.

Príklad. Zostrojte Hasseho diagram pre Booleovu algebru zodpovedajúcu výrokovým formulám s dvoma prvotnými formulami a a b.

Diagram bude mať 4 atómy, pretože máme štyri rôzne ohodnotenia dvoch prvotných formúl. Atómy preto budú $a \wedge b$, $a \wedge \neg b$, $\neg a \wedge b$ a $\neg a \wedge \neg b$. To značí, že Hasseho diagram bude grafom 4-rozmernej kocky. Tento diagram je na Obrázku 14, pričom vrcholy sme označili pomocou výrazov Booleovej algebry. Teda atómy sme zapísali ako ab, $a\overline{b}$, $\overline{a}b$ a $\overline{a}\,\overline{b}$.



Obrázok 14

Všimnime si, že prvotné formuly sa v Hasseho diagrame nachádzajú kdesi v strede, teda to nie sú atómy Booleovej algebry. To preto, lebo na j-tej úrovni diagramu (počítané odspodu, pričom 0 je na nultej úrovni) máme výrazy, ktoré zodpovedajú množinám obsahujúcim práve j najmenších podmnožín, na ktoré nám rozbili univerzum $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Vráťme sa ešte k Obrázku 14. Ktoré výrazy v ňom zodpovedajú tautológiám, ktoré kontradikciám a ktoré splniteľným formulám?

V nasledujúcich dvoch podkapitolách budeme, tak ako v predchádzajúcom príklade, používať namiesto logických spojok $\wedge$, $\vee$ a $\neg$ operácie Booleovej algebry.

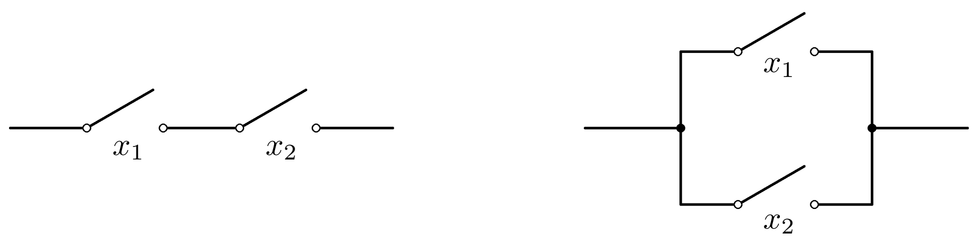
Spínacie obvody

Spínač si možno predstaviť ako jednoduchý prvok elektrického obvodu. Keď je zatvorený, tak obvodom prúd prechádza, zatiaľ čo keď je otvorený, tak obvodom prúd neprechádza, pozri Obrázok 15.

Obrázok 15

Priraďme spínaču Booleovskú premennú x. Potom ak je spínač otvorený, kladieme $x = 0$, obvodom prúd neprechádza a stav obvodu je 0. Naopak, ak je spínač zatvorený, kladieme $x = 1$, obvodom prúd prechádza a stav obvodu je 1.

Takýmto spôsobom môžeme dostať aj obvody so zložitejšími Booleovými funkciami. Na Obrázku 16 máme časti obvodov s dvojicou spínačov. Naľavo sú spínače zapojené do série a je zrejmé, že obvodom prúd prechádza iba ak sú obidva spíače zatvorené. Teda obvod má stav 1 práve vtedy, keď $x_1 = 1$ a $x_2 = 1$. Keď stav obvodu chceme vyjadriť Booleovou funkciou $f(x_1, x_2)$ s premennými x_1 a x_2, tak dostávame $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.



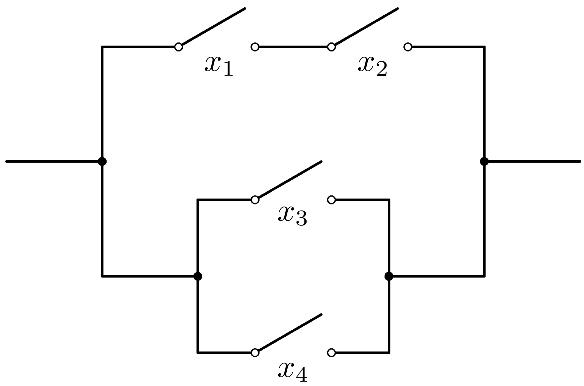
Obrázok 16

Naopak, v pravej časti Obrázku 16 sú spínače zapojené paralelne. Je zrejmé, že obvodom prúd prechádza práve vtedy, keď je zatvorený aspoň jeden spínač. Teda keď $x_1 = 1$ alebo $x_2 = 1$. Keď stav obvodu vyjadríme Booleovou funkciou $g(x_1, x_2)$, dostávame $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Príklad 6.1. Zostrojte Booleovu funkciu $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ spínacieho zariadenia znázorneného na Obrázku 17.

Táto funkcia bude mať zápis $f_1(x_1, x_2) + f_2(x_3, x_4)$, kde f_1 predstavuje funkciu pre hornú vetvu a f_2 funkciu pre dolnú vetvu. Keďže f_1 a f_2 sme už mali na Obrázku 16, dostávame $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + (x_3{+}x_4) = x_1x_2 + x_3 + x_4$.

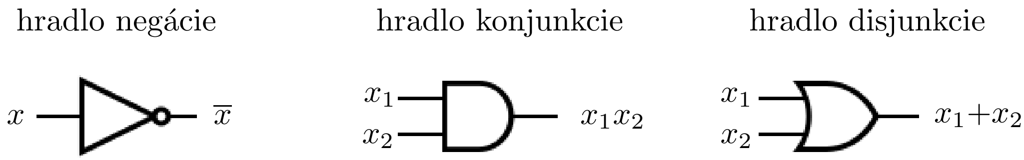
Spínače môžu byť aj spriahnuté. Ako sa zmení funkcia z Príkladu 6.1, ak v Obrázku 17 nahradíme x_3 výrazom $\overline{x_1}$ a x_4 výrazom x_2?



Obrázok 17

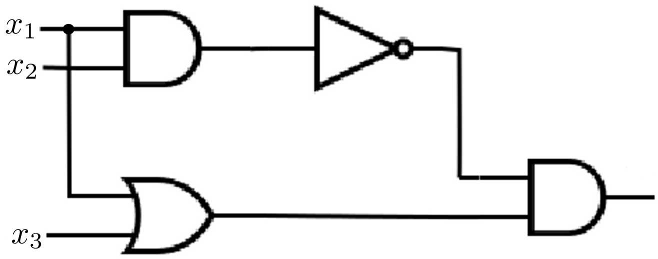
Hradlá

Trochu zložitejším prvkom obvodov sú hradlá. V nich už nevidíme vnútornú štruktúru, vieme však, ako pracujú. Základné typy hradiel sú hradlá pre negáciu, konjunkciu a disjunkciu. Na Obrázku 18 uvádzame schématické značky týchto prvkov logických sietí. Používajú sa však aj hradlá pre exkluzívnu disjunkciu (čiže pre $x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2$), pre funkciu Nor (čiže pre $\overline{x_1{+}x_2}$), Nand (teda pre $\overline{x_1x_2}$) a iné.



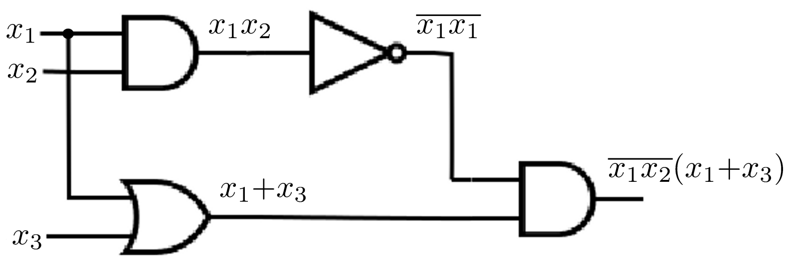
Obrázok 18

Príklad. Zostrojte Booleovu funkciu pre logický obvod, ktorý je znázornený na Obrázku 19.



Obrázok 19

Pri riešení postupujeme zľava doprava a postupne vyhodnocujeme funkciu za hradlami. Dostávame $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2}(x_1{+}x_3)$, čo možno pomocou de Morganových pravidiel zjednodušiť na $(\overline{x_1}{+}\overline{x_2})(x_1{+}x_3)$. Po roznásobení dostaneme výraz $\overline{x_1}x_1{+}\overline{x_1}x_3{+}\overline{x_2}x_1{+}\overline{x_2}x_3$, čiže $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_3{+}x_1\overline{x_2}{+}\overline{x_2}x_3$, pozri Obrázok 20.



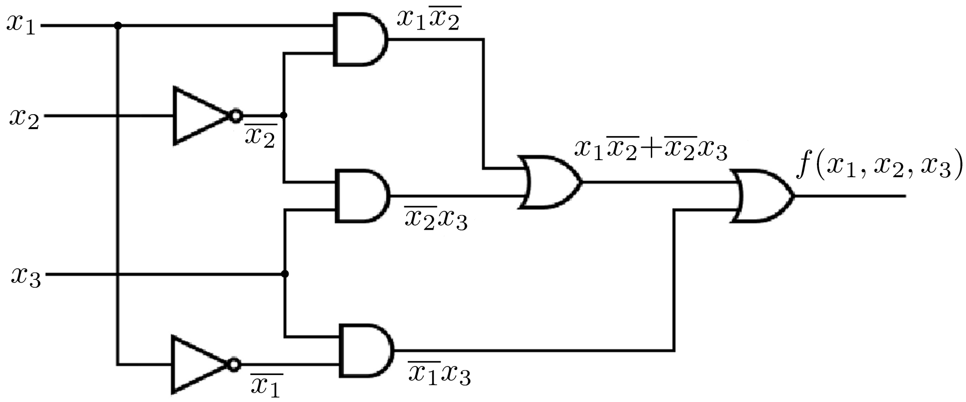
Obrázok 20

Zaujímavý je však opačný postup.

Príklad. Zostrojte logický obvod pre Booleovu funkciu troch argumentov $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_2}x_3$.

Obvod budeme tvoriť presne podľa zápisu. Najprv zostrojíme $\overline{x_1}$ a $\overline{x_2}$, potom pomocou súčinových hradiel zostrojíme súčiny a nakoniec výsledné súčiny sčítame. Dostávame schému znázornenú na Obrázku 21.

Všimnime si, že Booleove funkcie schém z Obrázkov 20 a 21 sú rovnaké, no v prvom prípade sme použili iba štyri hradlá, zatiaľ čo v druhom až sedem. Práve optimalizácia počtu hradiel je pri zostavovaní logických obvodov dôležitá.



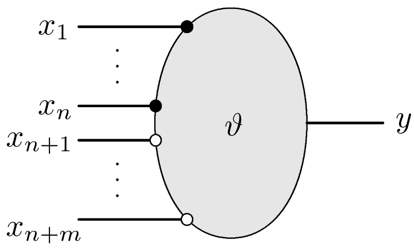
Obrázok 21

Logické neuróny

V tejto podkapitole sa vrátime k označeniu logických operácií pomocou spojok $\neg$, $\wedge$ a $\vee$, pretože $+$ budeme používať v inom význame.

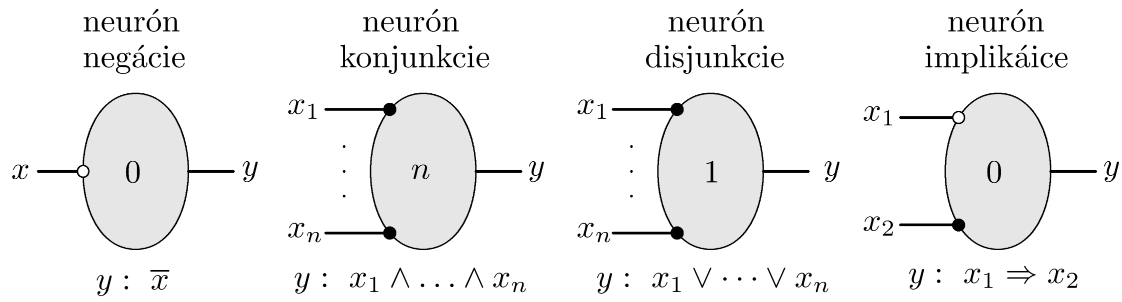
Zložitejší prvok ako hradlo je *logický neurón*. Z týchto štruktúr sa budujú *neurónové siete*. Neurón má n *excitačných* vstupov $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a m *inhibičných* vstupov $(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$, pričom všetky $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ nadobúdajú hodnoty $\{0, 1\}$. Excitačné vstupy sa označujú plným krúžkom a inhibičné prázdnym. Okrem toho neurón obsahuje prahový koeficient ϑ, pozri Obrázok 22. Potom výstup y logického neurónu popisuje funkcia

$$y = \begin{cases} 1 & \text{ak } x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m} \geq \vartheta \\ 0 & \text{ak } x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m} < \vartheta. \end{cases}$$



Obrázok 22

Na Obrázku 23 máme logické neuróny pre negáciu, konjunkciu, disjunkciu a implikáciu.

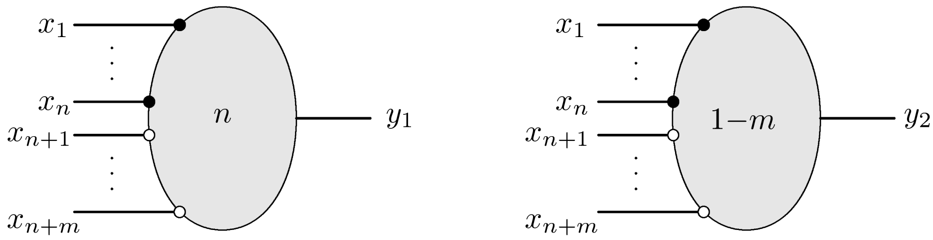


Obrázok 23

Logickými neurónmi vieme vyjadriť celé klauzuly DNF- a KNF-formúl, pozri Obrázok 24. V Obrázku 24 máme

$$
\begin{aligned}
y_1 &: x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge \urcorner x_{n+1} \wedge \urcorner x_{n+2} \wedge \ldots \wedge \urcorner x_{n+m} \\
y_2 &: x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \vee \urcorner x_{n+1} \vee \urcorner x_{n+2} \vee \cdots \vee \urcorner x_{n+m}.
\end{aligned}
$$

Vďaka tomu vieme aj pomerne komplikované Booleove funkcie reprezentovať neurónovými sieťami s relatívne malým počtom logických neurónov.



Obrázok 24

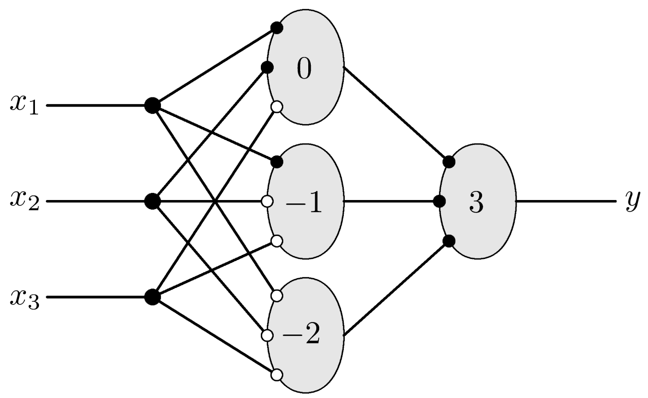
Príklad. Zostrojte neurónovú sieť pre Booleovu funkciu $f(x_1, x_2, x_3)$ danú nasledujúcou tabuľkou.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Funkcia f je ekvivalentná s DNF-formulou, ktorá má (v úplnom disjunktívnom normálnom tvare) päť klauzúl, respektíve s KNF-formulou, ktorá má (v úplnom konjunktívnom normálnom tvare) tri klauzuly. Zostrojíme preto neurónovú sieť zodpovedajúcu KNF-formule. Podľa postupu z Kapitoly 1 dostávame, že

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$$

je KNF-formula ekvivalentná s Booleovou funkciou f. Preto funkciu f možno reprezentovať neurónovou sieťou znázornenou na Obrázku 25.

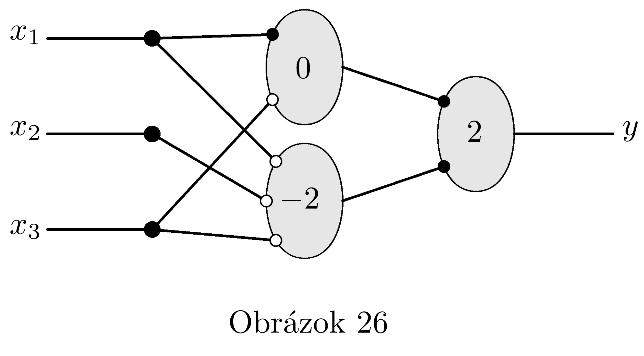


Obrázok 25

Všimnime si, že sieť z Obrázku 25 možno zjednodušiť, pretože prvé dve klauzuly sa líšia iba v tom, že zatiaľ čo v prvej je x_2, v druhej máme $\neg x_2$. Preto možno tieto klauzuly zlúčiť do jednej, menšej, v ktorej sa x_2 nebude vyskytovať. Teda f je ekvivalentná KNF-formule (táto už nie je v úplnom konjunktívnom normálnom tvare)

$$(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3). \tag{1}$$

Preto f možno reprezentovať neurónovou sieťou znázornenou na Obrázku 26.



Obrázok 26

Ďalším zjednodušením výrazu (1) sa dá počet neurónov siete reprezentujúcej f ešte znížiť.

Cvičenia

Cvičenie 6.1. Zostrojte DNF-formulu, ktorá nadobúda hodnotu 1 práve vtedy, keď platí
a) $x = 0$ a ($y = 1$ alebo $z = 0$), respektíve keď $x = 1$ a ($y = 0$ alebo $z = 1$)
b) $z = xy$ a zároveň $z = x + y$

Cvičenie 6.2. Zostrojte DNF-formulu ekvivalentnú s Booleovou funkciou:
a) $f(x, y, z) = x + \overline{y} + z$
b) $f(x, y, z) = x\overline{y} + z$
c) $f(x, y, z) = (x + y)(y\overline{z})$
d) $f(x, y, z) = (x + \overline{y} + z)\overline{x}y(\overline{z} + y)$

Cvičenie 6.3. V Cvičeniach 6.1 a 6.2 zostrojte KNF-formuly.

Cvičenie 6.4. Zostrojte spínacie obvody pre Booleove funkcie. Snažte sa nepoužívať spriahnuté spínače.
a) $x(y + z)$
b) $ac + ad + bc + bd$
c) $\overline{(xy)}z$
d) $a\overline{b} + \overline{a}b$

Cvičenie 6.5. Zostrojte všetky možné spínacie siete so štyrmi (nespriahnutými) spínačmi a zistite, aké Booleove funkcie reprezentujú.

Cvičenie 6.6. Pomocou základných typov hradiel (s maximálne dvoma vstupmi) zostavte logické obvody všetkých Booleových funkcií dvoch premenných. Snažte sa použiť vždy minimálny počet hradiel.

Cvičenie 6.7. Zostrojte čo najjednoduchší logický obvod (teda s minimálnym možným počtom hradiel) simulujúci Booleovu funkciu.
a) $\overline{(x + y)}(x + y)$
b) $x\overline{y} + y\overline{z} + z\overline{x}$
c) $xyz + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z$
d) $x\overline{z} + \overline{y}z + \overline{x}yz$
e) $\overline{(x + y)} + xy\overline{z} + \overline{x}z$
f) $xyz + x\overline{yz} + (x + \overline{y})z$

Cvičenie 6.8. Pre každú Booleovu funkciu dvoch premenných zostrojte neurónovú sieť, ktorá túto funkciu simuluje. Snažte sa použiť minimálny počet logických neurónov.

Cvičenie 6.9. Zostrojte neurónovú sieť simulujúcu Booleovu funkciu.
a) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
b) $\neg(a \wedge b \wedge c) \wedge (b \vee c)$
c) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (c \vee \neg b)$
d) $\big((a \Leftrightarrow b) \vee (\neg b \Leftrightarrow \neg c)\big) \wedge (c \Rightarrow \neg a)$
e) $(a \Leftrightarrow \neg b) \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)$
f) $\big((a \wedge b) \vee (c \wedge d)\big) \wedge \big((\neg a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg d)\big)$

Cvičenie 6.10. V definícii Booleovej algebry máme veľa vzťahov, ktoré majú operácie $\cdot$, $+$ a $\overline{}$ spĺňať. Ukážte, že idempotentnosť, modulárnosť, involúciu a de Morganove pravidlá možno odvodiť z ostatných vzťahov.

7 Predikátová logika, splniteľnosť

Uvažujme trojicu viet

$A:$ *Sokrates je človek.*

$B:$ *Každý človek je smrteľný.*

$C:$ *Sokrates je smrteľný.*

Všetky tri vety sú výroky, no nedokážeme ich vo výrokovej logike zapísať tak, aby bolo zrejmé to, čo vidno na prvý pohľad. A síce, že C je dôsledkom A a B. Aby sme to dokázali, potrebujeme výrokovú logiku rozšíriť o predikáty a kvantifikátory na *predikátovú logiku.*

Intuitívny úvod

Ak chceme C formálne zapísať tak, aby bolo zrejmé, že je dôsledkom A a B, potrebujeme ísť hlbšie do štruktúry výrokov A, B a C. Všetky tieto výroky hovoria čosi o bytostiach. Budeme preto uvažovať nejakú množinu, z ktorej tieto bytosti budú. Takúto množinu nazveme *univerzum* a jednotlivé bytosti z univerza nazveme *indivíduá* (*prvky univerza*).

Ďalej, bytosti z univerza zjavne môžu mať vlastnosti. Jedna vlastnosť bytosti bude, že je smrteľná. Označme túto vlastnosť písmenom Q. Ak je x indivíduum z univerza, tak

$Q(x)$ bude mať hodnotu 1 ak je indivíduum x smrteľné,

$Q(x)$ bude mať hodnotu 0 ak indivíduum x smrteľné nie je.

Takéto vlastnosti nazývame *predikáty.* Ďalším predikátom, povedzme P, označíme vlastnosť byť človekom.

V univerze indivíduí môžeme uvažovať rôzne *funkcie.* Napríklad funkcia $O(x)$ môže dať na výstupe otca x. Niektoré funkcie môžu mať dva, prípadne viac argumentov, avšak môžu byť aj funkcie bez argumentu. Funkcie bez argumentu nazývame *konštanty.* Označme symbolom S konštantu, ktorej hodnotou je Sokrates.

Na záver, pre indivíduá z univerza budeme používať *kvantifikátory. Všeobecný kvantifikátor* zapisujeme symbolom $\forall$ a čítame „pre každé“. Tento kvantifikátor používame vtedy, keď všetky prvky spĺňajú uvažovaný vzťah. Naopak, *existenčný kvantifikátor* zapisujeme symbolom $\exists$ a čítame „existuje“. Ním zapisujeme skutočnosť, že aspoň jeden prvok spĺňa uvažovaný vzťah. Ak označíme univerzum písmenom $\mathcal{M}$, tak

$$(\forall x)\, T(x) \quad \text{je iba skrátený zápis} \quad \bigwedge_{x\in\mathcal{M}} T(x), \quad \text{čiže} \quad T(x_1)\wedge T(x_2)\wedge\dots$$

$$(\exists x)\, T(x) \quad \text{je iba skrátený zápis} \quad \bigvee_{x\in\mathcal{M}} T(x), \quad \text{čiže} \quad T(x_1)\vee T(x_2)\vee\dots$$

Všimnime si, že z de Morganových pravidiel vyplýva

$$\bigvee_{x\in\mathcal{M}} T(x) = \neg\neg \bigvee_{x\in\mathcal{M}} T(x) = \neg\Big(\bigwedge_{x\in\mathcal{M}} \neg T(x)\Big),$$

čiže $(\exists x)T(x)$ je iba iný zápis pre $\neg(\forall x)\neg T(x)$. Znamená to, že keby sme potrebovali, stačilo by nám uvažovať iba jeden kvantifikátor.

Keď použijeme uvedené označenia, výroky A, B a C môžeme zapísať:

$$\begin{aligned} A:&\quad P(S)\\ B:&\quad (\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\\ C:&\quad Q(S)\end{aligned}$$

Keďže B je vlastne

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{M}} \big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big) = \big(P(x_1)\Rightarrow Q(x_1)\big)\wedge\ldots\wedge\big(P(S)\Rightarrow Q(S)\big)\wedge\ldots$$

tak dôsledkom B je výrok D: $P(S)\Rightarrow Q(S)$. Čiže máme

$$\begin{aligned} A:&\quad P(S)\\ B:&\quad (\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big) \qquad D:\quad P(S)\Rightarrow Q(S)\\ C:&\quad Q(S)\end{aligned}$$

Teraz už vidíme, prečo je C dôsledkom výrokov A a B. Je to preto, že C je modus ponens A a D.

Predikátovú logiku však môžeme budovať aj pre úplne iné oblasti. Môžeme pomocou nej opisovať teóriu množín. Môžeme ňou budovať aritmetiku prirodzených čísel. Prípadne môžeme pomocou nej opisovať príbuzenské vzťahy medzi ľuďmi. Pritom v každom z týchto prípadov budeme uvažovať o inom univerze, iných funkciách a iných predikátoch.

Relácie a zobrazenia

Prv než prejdeme k formálnemu opisu predikátovej logiky, zavedieme pojem *n-árnej relácie* a *n-árneho zobrazenia.*

Výrazom A^n označujeme množinu usporiadaných n-tíc $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde všetky prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú z A. Všimnime si, že ak má množina A presne a prvkov, tak A^n obsahuje a^n usporiadaných n-tíc.

Definícia. **n-árna relácia** (**n-árny predikát**) na množine A je ľubovoľná podmnožina A^n. Prvky n-árnej relácie sú teda usporiadané n-tice.

Definícia. **n-árne zobrazenie** (**n-árna funkcia**) na množine A je ľubovoľná podmnožina A^{n+1} taká, že ak sú $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ a $(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$ prvkami tejto podmnožiny, pričom $a_i = b_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, tak aj $a_{n+1} = b_{n+1}$. Skutočnosť, že $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ je prvkom funkcie f, zapisujeme $f(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}$. Potom n-tica $a_1, \ldots, a_n$ je *argumentom* funkcie f a a_{n+1} je jej *hodnotou* v tomto argumente.

Podobne ako v úvodnom príklade, predikáty (n-árne relácie) budú vlastnosti, ktoré niektoré n-tice majú a iné nemajú. Podľa toho budeme predikátom priraďovať hodnotu 1 alebo 0. Naopak, funkcie budú slúžiť na konštrukciu výrazov, ktoré budeme do predikátov dosadzovať.

Jazyk prvého rádu

Teraz formálne rozšírime jazyk výrokovej logiky na jazyk predikátovej logiky.

Definícia. **Jazyk $\mathfrak{L}$ predikátovej logiky** (**jazyk prvého rádu**) tvoria:

Logické symboly:

- symboly pre premenné $x, y, x_1, z_1, \ldots$;
- symboly pre logické spojky $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$;
- symboly pre kvantifikátory $\forall$ (všeobecný, veľký) a $\exists$ (existenčný, malý).

Špeciálne symboly jazyka:

- symboly pre predikáty P, Q, P_1, ... (pre každý je daná jeho árnosť);
- symboly pre funkcie f, g, f_1, ... (pre každý je daná jeho árnosť).

Pomocné symboly zátvorky ( ) [ ] a čiarka , .

Medzi logické symboly sa často radí aj symbol pre rovnosť $=$ a vtedy hovoríme o **jazyku s rovnosťou**.

Ako sme spomenuli v úvode kapitoly, nulárne funkčné symboly (funkcie bez argumentu) sú konštanty, zatiaľ čo nulárne predikátové symboly sú logické konštanty 0 a 1 (pravda a lož).

Príklad. Jazyk teórie množín je jazyk s rovnosťou s jediným špeciálnym symbolom, ktorým je binárny predikát $\in$.

Príklad. Jazyk elementárnej aritmetiky (na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$) je jazyk s rovnosťou, ktorý má nasledujúce špeciálne symboly:

0 – nulárny funkčný symbol pre nulu;
S – unárny funkčný symbol pre funkciu nasledovníka;
$+, \cdot$ – binárne funkčné symboly pre sčítanie a násobenie.

Príklad. Ak by sme opisovali jazyk príbuzenských vzťahov medzi ľuďmi, tak tento jazyk by asi obsahoval unárne predikáty ŽENA, MUŽ, binárne predikáty RODIČ, MANŽEL, ako aj unárny funkčný symbol O pre otca, či M pre mamu.

Termy a formuly

V úvodnom príklade sme za argument unárnych predikátov dosadili S (nulárny funkčný symbol), respektíve x (premennú). Niekedy však potrebujeme za argument dosadiť komplikovanejší výraz (*term*). Nasledujúca definícia opisuje, ako tieto komplikované výrazy vznikajú.

Definícia. **Termy** (**výrazy**) jazyka predikátovej logiky $\mathfrak{L}$ vznikajú konečným počtom aplikácií nasledujúcich pravidiel:

(T1) Každá premenná a konštanta (nulárny funkčný symbol) je term.
(T2) Ak je f n-árny funkčný symbol jazyka $\mathfrak{L}$, $n \geq 1$, a $t_1, t_2, \dots, t_n$ sú termy jazyka $\mathfrak{L}$, tak $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je term jazyka $\mathfrak{L}$.

Výsledkom termu (po dosadení za premenné) je jeden prvok skúmanej množiny, čiže jedno indivíduum z univerza.

Príklad. V jazyku elementárnej aritmetiky sú termy napríklad 0; $S(x)$; $S(S(y))$; $S(0)$ – to je zrejme číslo 1; $S(S(0))$ – číslo 2. Termom je aj $(S(x) \cdot y) + x$, ale $S(0, x)$, $+S(0)$, ani $=$ nie sú termy.

Definícia. **Formuly** sa budujú z termov a ostatných symbolov jazyka prvého rádu $\mathfrak{L}$ použitím konečného počtu týchto pravidiel:

(F1) Ak je P n-árny predikátový symbol a $t_1, t_2, \dots, t_n$ sú termy jazyka $\mathfrak{L}$, tak $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je formula jazyka $\mathfrak{L}$. Takúto formulu nazývame **atomická formula**.
(F1)' Ak je $\mathfrak{L}$ jazyk s rovnosťou, tak pre ľubovoľné termy t_1, t_2 v $\mathfrak{L}$ je aj $t_1 = t_2$ atomická formula.
(F2) Ak sú A a B formuly jazyka $\mathfrak{L}$, tak $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ a $(A \Leftrightarrow B)$ sú formuly jazyka $\mathfrak{L}$.
(F3) Ak je x premenná a A je formula, tak $(\forall x)A$ a $(\exists x)A$ sú formuly jazyka $\mathfrak{L}$.

Dĺžka vytvorenia formuly pomocou pravidiel F1 až F3 sa volá **zložitosť formuly**.

Podobne ako vo výrokovej logike, posledné vonkajšie zátvorky pri formulách budeme vynechávať. Ak máme jazyk s rovnosťou, tak túto považujeme za špeciálny binárny predikát.

Formula je vlastne tvrdenie a môžeme už uvažovať o jej pravdivosti. Avšak ak sa pýtame, či je A formulou, tak nás zaujíma len to, či A možno vytvoriť z termov pomocou pravidiel F1 až F3 a vôbec nás nezaujíma, čo by takáto formula mohla vyjadrovať (a či táto formula vôbec má zmysel).

Príklad. V jazyku elementárnej aritmetiky sú $x = 0$, $(S(x) + y) = S(x + y)$ a $(x + S(y)) = 0$ atomické formuly, zatiaľ čo $(\forall x)(\exists y)((S(x) + y) = S(x + y))$ a $\neg(\exists x)(S(x) = 0)$ sú formuly.

Definícia. Nech je A formula. Potom výskyt premennej x je vo formule A **viazaný**, ak je súčasťou podformuly tvaru $(\forall x)B$, alebo $(\exists x)B$. Ak výskyt premennej x nie je viazaný, tak je **voľný**. Formula A je **otvorená** ak majú všetky premenné v tejto formule iba voľný výskyt. Naopak, A je **uzavretá** ak majú všetky premenné v tejto formule iba viazaný výskyt.

PRÍKLAD. V jazyku elementárnej aritmetiky uvažujme nasledujúce formuly:

a) $(\forall x)(\exists y)(S(x) = y)$ – ide o uzavretú formulu, x aj y majú len viazaný výskyt.
b) $x = y$ – otvorená formula.
c) $S(0) + 0 = S(0)$ – je aj uzavretá aj otvorená, lebo neobsahuje žiadne premenné.
d) $(x \neq 0) \Rightarrow (\forall x)(x \cdot z \neq 0)$ – tu x má v prvej časti voľný výskyt a v druhej viazaný. Tie premenné x v prvej a v druhej časti sú vlastne rôzne. Táto formula nie je ani otvorená ani uzavretá.

Substituovateľnosť

Za premenné často dosadzujeme rôzne konštanty, prípadne iné výrazy (termy).

DEFINÍCIA. Nech sú $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rôzne premenné a $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ nech sú termy jazyka prvého rádu $\mathfrak{L}$. Symbolom $t_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ označujeme term jazyka $\mathfrak{L}$, ktorý vznikne z t nahradením každého výskytu premennej x_i termom t_i pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

PRÍKLAD. V jazyku elementárnej aritmetiky uvažujme štyri termy.

$$t: \quad (x+y)\cdot x \qquad\qquad t_1: \quad x+x \qquad\qquad t_2: \quad z\cdot y \qquad\qquad t_3: \quad y+z$$

Potom

$$\begin{array}{lll} t_{x,y}[t_1, t_2] & \text{je} & ((x+x)+(z\cdot y))\cdot(x+x), \\ t_{x,y}[t_3, t_2] & \text{je} & ((y+z)+(z\cdot y))\cdot(y+z) \end{array}$$

a podobne.

DEFINÍCIA. Ak je A formula, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú premenné a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú termy v jazyku prvého rádu $\mathfrak{L}$, tak $A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ vznikne z A nahradením každého voľného výskytu premennej x_i termom t_i pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nech je A formula v jazyku elementárnej aritmetiky

$$A: \ (\exists y)(x = y + y)$$

a nech je t term $y+x$. Formulu A možno interpretovať ako: „x je párne“. Avšak $A_x[t]$ je formula $(\exists y)(y + x = y + y)$, pričom táto nie je špeciálnym prípadom tvrdenia „$y + x$ je párne“, ale tvrdí, že „existuje y pre ktoré $x = y$“.

Podobný problém by sme mali, keby sme sa snažili substituovať y za x do formuly $(\exists y)(x \neq y)$. Takýmto problémom sa budeme vyhýbať. Spravíme to tak, že do podformúl, v ktorých je y viazané, zakážeme dosadzovať za premenné termy, v ktorých sa vyskytuje y.

Definícia. Term t je **substituovateľný** za x do formuly A ak pre každú premennú y z t žiadna podformula A tvaru $(\forall y)B$ ani $(\exists y)B$ neobsahuje voľný výskyt x. Budeme substituovať len substituovateľné termy a $A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ nazveme **inštanciou** (**špeciálnym prípadom**) formuly A.

Sémantika formúl predikátovej logiky

V tejto podkapitole budeme skúmať význam formúl predikátovej logiky.

Uvažujme formulu A zapísanú v jazyku príbuzenských vzťahov

$$A:\ (\forall x)(\exists u)(\exists v)((u \neq v) \wedge (\text{RODIČ}(u, x)) \wedge (\text{RODIČ}(v, x)))\,.$$

Táto formula tvrdí, že každé x z univerza má dvoch rôznych rodičov. Formula A je pravdivá ak hovoríme o stavovcoch, ale nie ak je reč o živočíchoch s vegetatívnym rozmnožovaním (napríklad o nezmaroch). Aby sme tieto prípady rozlíšili, zavedieme *interpretáciu* jazyka predikátovej logiky.

Definícia. **Interpretácia** (**realizácia**) $\mathfrak{M}$ jazyka $\mathfrak{L}$ prvého rádu je daná:

(I1) Neprázdnou množinou $\mathcal{M}$, ktorú nazývame **univerzum** (**nosič**). Je to množina hodnôt, ktoré nadobúdajú premenné. Prvky množiny $\mathcal{M}$ voláme **indivíduá**.
(I2) Zobrazením, ktoré každému n-árnemu funkčnému symbolu f z $\mathfrak{L}$ priradí funkciu $f_{\mathfrak{M}} : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}$.
(I3) Zobrazením, ktoré každému n-árnemu predikátovému symbolu P z $\mathfrak{L}$ priradí n-árnu reláciu $P_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathcal{M}^n$.

Príklad. V realizácii $\mathfrak{M}$ jazyka elementárnej aritmetiky by sme za nosič zvolili množinu prirodzených čísel $\mathbb{N}$, nulárnemu funkčnému symbolu by sme priradili 0, symboly $+$ a $\cdot$ by reprezentovali bežné sčítanie a násobenie a pre funkciu nasledovníka S by sme zrejme volili $S_{\mathfrak{M}} : x \to x{+}1$.

Definícia. Zobrazenie e množiny všetkých premenných do univerza $\mathcal{M}$ interpretácie $\mathfrak{M}$ nazývame **ohodnotením premenných**.

Keď už máme ohodnotenie premenných e, tak hodnotu tohoto ohodnotenia na terme t, čiže $t[e]$, môžeme definovať indukciou podľa konštrukcie termu t:

1° Ak je t premenná x, tak $t[e]$ je $e(x)$ a ak je t symbol nulárnej funkcie (konštanty), tak $t[e]$ je hodnota priradená tejto funkcii v realizácii $\mathfrak{M}$.
2° Ak je t term $f(t_1, \ldots, t_n)$, tak $t[e]$ je $f_{\mathfrak{M}}(t_1[e], \ldots, t_n[e])$.

Definícia. Nech je e ohodnotenie premenných v realizácii $\mathfrak{M}$ jazyka $\mathfrak{L}$. Zvoľme pevne $m \in \mathcal{M}$ a premennú x z $\mathfrak{L}$. Potom $e(x/m)$ je ohodnotenie, ktoré sa od e líši iba v tom, že premennej x nutne priradí m.

Teraz si povieme ako určíme *pravdivosť* formuly pri danej realizácii a ohodnotení premenných.

Definícia (**Tarski**). Majme jazyk prvého rádu $\mathfrak{L}$. Nech je $\mathfrak{M}$ jeho realizácia s nosičom $\mathcal{M}$ a e nech je ohodnotenie premenných. Indukciou podľa zložitosti formuly definujeme **pravdivosť formuly pri ohodnotení** e (ak je formula A pri ohodnotení e pravdivá, tak zapisujeme $\mathfrak{M} \models A[e]$, zatiaľ čo v opačnom prípade zapisujeme $\mathfrak{M} \not\models A[e]$) takto:

(R1) Ak sú $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termy v $\mathfrak{L}$ a P je n-árny predikátový symbol rôzny od $=$, tak $\mathfrak{M} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)[e]$ práve vtedy, keď $(t_1[e], t_2[e], \ldots, t_n[e]) \in P_{\mathfrak{M}}$.

(R1)′ $\mathfrak{M} \models (t_1 = t_2)[e]$ práve vtedy, keď $t_1[e]$ a $t_2[e]$ sú tie isté indivíduá z $\mathcal{M}$.

(R2) Ak sú B a C formuly v $\mathfrak{L}$, tak $\mathfrak{M} \models \neg B[e]$ práve vtedy, keď neplatí $\mathfrak{M} \models B[e]$ (t.j. keď $\mathfrak{M} \not\models B[e]$). $\mathfrak{M} \models (B \Rightarrow C)[e]$ práve vtedy, keď $\mathfrak{M} \not\models B[e]$, alebo $\mathfrak{M} \models C[e]$. (Podobne sa definuje aj pravdivosť $B \wedge C$, $B \vee C$ a $B \Leftrightarrow C$ pri $\mathfrak{M}$ a e.)

(R3) Ak je x premenná v $\mathfrak{L}$ a B je formula, tak $\mathfrak{M} \models (\forall x)B[e]$ práve vtedy, keď pre každé indivíduum m z $\mathcal{M}$ platí $\mathfrak{M} \models B[e(x/m)]$. Ďalej $\mathfrak{M} \models (\exists x)B[e]$ platí práve vtedy, keď pre nejaké indivíduum m z $\mathcal{M}$ platí $\mathfrak{M} \models B[e(x/m)]$.

Lema 7.1. *Nech je L jazyk predikátovej logiky, $\mathfrak{M}$ je jeho realizácia a e je ohodnotenie premenných. Potom pre ľubovoľnú formulu A v L platí buď $\mathfrak{M} \models A[e]$, alebo $\mathfrak{M} \not\models A[e]$, avšak nikdy nie súčasne.*

Dôkaz. Z definície Tarského, zo vzťahu pre negáciu v (R2) plynie, že $\mathfrak{M} \not\models A[e]$ platí práve vtedy, keď neplatí $\mathfrak{M} \models A[e]$. □

Splniteľnosť formúl

Podobne, ako sme sa vo výrokovej logike venovali najprv tautológiám a až potom dokázateľným (odvoditeľným) formulám, budeme sa aj v predikátovej logike venovať najprv splniteľným formulám a až potom formulám dokázateľným.

Definícia. Formula A je **splnená** v realizácii $\mathfrak{M}$, označujeme $\mathfrak{M} \models A$, ak je pravdivá v $\mathfrak{M}$ pri ľubovoľnom ohodnotení e.

Lema 7.2. *Nech je $\mathfrak{L}$ jazyk predikátovej logiky, $\mathfrak{M}$ je jeho realizácia, A je formula v $\mathfrak{L}$ a x je premenná. Potom $\mathfrak{M} \models A$ platí práve vtedy, keď $\mathfrak{M} \models (\forall x)A$.*

Dôkaz. Nech platí $\mathfrak{M} \models A$. Chceme ukázať, že $\mathfrak{M} \models (\forall x)A$, teda že pre ľubovoľné ohodnotenie e platí $\mathfrak{M} \models (\forall x)A[e]$. Nech je teda e_0 ľubovoľné pevne zvolené ohodnotenie premenných prvkami z nosiča $\mathcal{M}$ realizácie $\mathfrak{M}$. Podľa definície platí $\mathfrak{M} \models (\forall x)A[e_0]$ práve vtedy, keď pre ľubovoľné $m \in \mathcal{M}$ platí $\mathfrak{M} \models A[e_0(x/m)]$. Avšak $e_0(x/m)$ je tiež iba ohodnotenie a keďže $\mathfrak{M} \models A$, tak aj $\mathfrak{M} \models A[e_0(x/m)]$. Teda $\mathfrak{M} \models (\forall x)A$.

Naopak, nech platí $\mathfrak{M} \models (\forall x)A$. Potom pre každé ohodnotenie e a pre každé $m \in \mathcal{M}$ platí $\mathfrak{M} \models A[e(x/m)]$. Zvoľme m_e tak, aby $m_e = e(x)$. Potom musí platiť aj $\mathfrak{M} \models A[e(x/m_e)]$, čiže $\mathfrak{M} \models A[e]$. Teda platí $\mathfrak{M} \models A$. □

Poznámka 1. Platí $\big(\mathfrak{M} \models A\big) \Leftrightarrow \big(\mathfrak{M} \models (\forall x)A\big)$, ale neplatí $\mathfrak{M} \models (A \Rightarrow (\forall x)A)$. Ako príklad môže slúžiť jazyk $\mathfrak{L}$ s jediným unárnym predikátovým symbolom P, s interpretáciou $\mathfrak{N}$ a nosičom $\mathcal{N} = \{a, b\}$. Nech $a \in P_{\mathfrak{N}}$, ale $b \notin P_{\mathfrak{N}}$. Potom v $\mathfrak{N}$

neplatí $(\forall x)P(x)$ pre ľubovoľné ohodnotenie premenných (v skutočnosti formula $(\forall x)P(x)$ nezávisí od ohodnotenia premenných – pozri Tarského definíciu). Avšak ak je e zvolené tak, že $e(x) = a$, tak $\mathfrak{N} \models P(x)[e]$ a teda $\mathfrak{N} \not\models \big(P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)\big)[e]$, čiže aj $\mathfrak{N} \not\models \big(P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)\big)$.

Príklad z predchádzajúcej poznámky môžeme sformulovať aj v jazyku príbuzenských vzťahov. Majme univerzum pozostávajúce z dvoch prvkov, pričom jeden je Adam a druhý Eva. Potom unárny predikát ŽENA spĺňa vlastnosti predikátu P spomenutého vyššie. Preto v tejto realizácii pre ohodnotenie e, v ktorom $e(x)$ je Eva, neplatí ŽENA$(x) \Rightarrow (\forall x)$ŽENA$(x)$. To preto, lebo zatiaľ čo ŽENA(Eva) je pravdivý výrok, tak tvrdenie $(\forall x)$ŽENA(x) pravdivé nie je.

Poznámka 2. Nech je $\mathfrak{L}$ jazyk predikátovej logiky, $\mathfrak{M}$ je jeho realizácia a A je formula v $\mathfrak{L}$. Keďže každú formulu vieme zostrojiť aplikovaním pravidiel (F1) až (F3) konečne veľa krát, tak každá formula má len konečne veľa premenných. Nech sú $x_1, x_2, \ldots, x_k$ všetky voľné premenné formuly A. Podľa Lemy 7.2 (aplikovanej k-krát) $\mathfrak{M} \models A$ platí práve vtedy, keď $\mathfrak{M} \models (\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_k)A$. To znamená, že nám stačí zisťovať, či sú v $\mathfrak{M}$ splnené uzavreté formuly.

Definícia. Formula A je **všeobecne platná** (**logicky pravdivá**), ak je splnená v ľubovoľnej realizácii $\mathfrak{M}$. Skutočnosť, že je A všeobecne platná, zapisujeme $\models A$.

Úvahou ukážeme, že sú logicky pravdivé dve špeciálne formuly predikátovej logiky. Tieto dve formuly v ďalšej kapitole prehlásime za axiómy.

Lema 7.3. *Nech sú A a B formuly v jazyku prvého rádu $\mathfrak{L}$. Ak premenná x nemá voľný výskyt v A, tak platí* $\models (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$.

Dôkaz. Podľa vyššie uvedenej definície $\models (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$ platí práve vtedy, keď v ľubovoľnej realizácii $\mathfrak{M}$ pre ľubovoľné ohodnotenie premenných e platí $\mathfrak{M} \models \big((\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)\big)[e]$. Majme teda ľubovoľnú realizáciu $\mathfrak{M}$ jazyka $\mathfrak{L}$ a ľubovoľné ohodnotenie e premenných prvkami z nosiča $\mathcal{M}$ realizácie $\mathfrak{M}$. Náš cieľ je ukázať, že platí $\mathfrak{M} \models \big((\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)\big)[e]$.

Ak by platilo $\mathfrak{M} \not\models (\forall x)(A \Rightarrow B)[e]$, alebo $\mathfrak{M} \not\models A[e]$ tak by formula pri $\mathfrak{M}$ a e platila. Predpokladajme teda, že platí $\mathfrak{M} \models (\forall x)(A \Rightarrow B)[e]$ aj $\mathfrak{M} \models A[e]$. Potom pre ľubovoľný prvok m z nosiča realizácie $\mathfrak{M}$ platí $\mathfrak{M} \models (A \Rightarrow B)[e(x/m)]$. Keďže x nie je voľná v A (to znamená, že buď je v A viazaná, alebo tam vôbec nie je), tak z platnosti $\mathfrak{M} \models A[e]$ plynie platnosť $\mathfrak{M} \models A[e(x/m)]$. Avšak potom modus ponens formúl $\mathfrak{M} \models (A \Rightarrow B)[e(x/m)]$ a $\mathfrak{M} \models A[e(x/m)]$ dáva $\mathfrak{M} \models B[e(x/m)]$. Keďže m bol ľubovoľný prvok z nosiča realizácie $\mathfrak{M}$, tak podľa definície Tarského máme $\mathfrak{M} \models (\forall x)B[e]$. To znamená, že platí $\mathfrak{M} \models \big((\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)\big)[e]$, a keďže na $\mathfrak{M}$ ani na e sme nekládli žiadne obmedzujúce podmienky, tak platí $\models (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$. $\square$

Poznámka. Ak by x bola voľná v A v predchádzajúcej vete, tak tvrdenie nemusí platiť. Uvažujme jazyk predikátovej logiky $\mathfrak{L}$ s jediným unárnym predikátovým symbolom P, s interpretáciou $\mathfrak{N}$ a nosičom $\mathcal{N} = \{a, b\}$. Nech $a \in P_{\mathfrak{N}}$, $b \notin P_{\mathfrak{N}}$ a nech $A = B = P(x)$. Potom platí $\mathfrak{N} \models (\forall x)\big(P(x) \Rightarrow P(x)\big)$, ale $\mathfrak{N} \not\models (\forall x)P(x)$. Preto pre ohodnotenie $e(x) = a$ máme $\mathfrak{N} \nvDash \big((\forall x)\big(P(x) \Rightarrow P(x)\big) \Rightarrow \big(P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)\big)\big)[e]$, čiže $\mathfrak{N} \nvDash (\forall x)\big(P(x) \Rightarrow P(x)\big) \Rightarrow \big(P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)\big)$.

LEMA 7.4. *Nech je A formula v jazyku predikátovej logiky $\mathfrak{L}$, x nech je premenná a t je term substituovateľný do A za x. Potom $\vDash (\forall x)A \Rightarrow A_x[t]$.*

DÔKAZ. Opäť, aby sme ukázali že platí $\vDash (\forall x)A \Rightarrow A_x[t]$, potrebujeme pre každú realizáciu $\mathfrak{M}$ a pre každé ohodnotenie e ukázať, že platí $\mathfrak{M} \vDash \big((\forall x)A \Rightarrow A_x[t]\big)[e]$.

Nech je teda $\mathfrak{M}$ ľubovoľná interpretácia $\mathfrak{L}$ a nech je e ľubovoľné ohodnotenie premenných prvkami z nosiča. Ak $\mathfrak{M} \nvDash (\forall x)A[e]$, tak platí $\mathfrak{M} \vDash \big((\forall x)A \Rightarrow A_x[t]\big)[e]$ a niet čo dokazovať. Preto nech $\mathfrak{M} \vDash (\forall x)A[e]$. To však znamená, že pre každý prvok m z nosiča realizácie $\mathfrak{M}$ platí $\mathfrak{M} \vDash A[e(x/m)]$. Nech je m_0 to indivíduum, ktoré realizuje term t v ohodnotení e, teda $m_0 = t[e]$. Potom platí aj $\mathfrak{M} \vDash A[e(x/m_0)]$, čo je $\mathfrak{M} \vDash (A_x[t])[e]$. Keďže $\mathfrak{M}$ aj e boli volené ľubovoľne, tak $\vDash (\forall x)A \Rightarrow A_x[t]$. $\square$

DEFINÍCIA. Ak je formula A splnená pri všetkých realizáciách $\mathfrak{M}$ s k-prvkovými nosičmi, tak A je k-**všeobecne platná**.

Pre malé k a jednoduchú formulu A môžeme k-všeobecnú platnosť dokázať pomocou pravdivostnej tabuľky.

PRÍKLAD. Ukážte, že nasledujúca formula A je 2-všeobecne platná

$$A:\ (\exists x)P(x) \Rightarrow \big(\big(\neg P(y) \Rightarrow P(z)\big) \vee (y = z)\big).$$

Nech sú a, b prvky nosiča $\mathcal{M}$. Potrebujeme uvažovať všetky realizácie unárneho predikátu P. Sú štyri: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ a $\{a, b\}$. Pre každú takúto realizáciu potrebujeme uvažovať obidve možné ohodnotenia $e(y)$ a obidve možné ohodnotenia $e(z)$. Takže pravdivostná tabuľka bude mať 16 riadkov. V tejto tabuľke označme B podformulu $\big(\neg P(y) \Rightarrow P(z)\big) \vee (y = z)$ a C podformulu $\neg P(y) \Rightarrow P(z)$. Dostávame:

P	$e(y)$	$e(z)$	$(\exists x)P(x)$	$\neg P(y)$	$P(z)$	C	$y{=}z$	B	A
$\emptyset$	a	a	0	1	0	0	1	1	1
$\emptyset$	a	b	0	1	0	0	0	0	1
$\emptyset$	b	a	0	1	0	0	0	0	1
$\emptyset$	b	b	0	1	0	0	1	1	1
$\{a\}$	a	a	1	0	1	1	1	1	1
$\{a\}$	a	b	1	0	0	1	0	1	1
$\{a\}$	b	a	1	1	1	1	0	1	1
$\{a\}$	b	b	1	1	0	0	1	1	1
$\{b\}$	a	a	1	1	0	0	1	1	1
$\{b\}$	a	b	1	1	1	1	0	1	1
$\{b\}$	b	a	1	0	0	1	0	1	1
$\{b\}$	b	b	1	0	1	1	1	1	1
$\{a,b\}$	a	a	1	0	1	1	1	1	1
$\{a,b\}$	a	b	1	0	1	1	0	1	1
$\{a,b\}$	b	a	1	0	1	1	0	1	1
$\{a,b\}$	b	b	1	0	1	1	1	1	1

Všimnime si, že sme v predchádzajúcej tabuľke neuvažovali ohodnotenie $e(x)$ pre x. To preto, lebo pravdivosť podformuly $(\exists x)P(x)$ nezávisí od $e(x)$, pozri definíciu Tarského.

Podobne ako vo výrokovej logike definujeme splniteľnosť a logický dôsledok.

Definícia. Formula A je **splniteľná** v realizácii $\mathfrak{M}$ jazyka $\mathfrak{L}$, ak existuje ohodnotenie e premenných také, že $\mathfrak{M} \models A[e]$. Ak v každej realizácii, v ktorej je splnená B, je splnená aj A, tak A je **logický dôsledok** B, čo zapisujeme $B \models A$.

Cvičenia

Cvičenie 7.1. Zapíšte pomocou jazyka predikátovej logiky nasledujúce tvrdenia. Popíšte univerzum a realizáciu predikátov.

a) Každý učiteľ má aspoň jedného žiaka.
b) Každý rektor má aspoň dvoch dekanov.
c) Neexistuje človek, ktorý by sa páčil každému.
d) Nikto ma nemá rád.
e) Janko nemá bračeka.
f) Postupnosť $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ má limitu a.
g) Funkcia f má periódu p.
h) Funkcia f je spojitá v bode x_0.
i) Funkcia f má v bode a globálne maximum.
j) Funkcia f má v bode a lokálne minimum.
k) Neexistuje množina, ktorá obsahuje samú seba.
l) Neexistuje najväčšie prvočíslo. (Teda od každého prvočísla exisuje väčšie.)

Cvičenie 7.2. V jazyku príbuzenských vzťahov, ktorý obsahuje iba unárne predikáty ŽENA, MUŽ a binárne predikáty RODIČ, MANŽEL zapíšte:

a) Mária je Andrejova stará mama.
b) Danka a Janka sú sestry.
c) Pavol a Jozef sú bratranci.
d) Eva má dve deti.
e) Štefan je Evičkin svokor.
f) Karol a Adam sú švagrovia.

Cvičenie 7.3. V jazyku elementárnej aritmetiky, ktorý je jazykom s rovnosťou a má funkčné symboly 0, S, $+$ a $\cdot$ zapíšte:

a) x je štvorec.
b) y je o 3 väčšie ako x.
c) x je prvočíslo.
d) Jediné párne prvočíslo je 2.
e) 1 je väčšie ako 0.
f) Ak je x párne, tak $x + 1$ je nepárne.

Cvičenie 7.4. $S((x+S(0))\cdot(y\cdot S(0)))$ je term v jazyku elementárnej aritmetiky. Opíšte jeho konštrukciu.

Cvičenie 7.5. Uvažujme binárny predikát $P(x, y)$. Pomocou tabuľky s riadkami zodpovedajúcimi hodnote prvého argumentu x a stĺpcami zodpovedajúcimi hodnote druhého argumentu y sa pokúste zapísať nasledujúce formuly. Ktoré z nich sú ekvivalentné?

a) $(\forall x)(\exists y)\neg P(x,y)$ b) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ c) $\neg\big((\forall x)(\exists y)P(x,y)\big)$
d) $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$ e) $(\forall y)(\exists x)\neg P(x,y)$ f) $\neg\big((\exists x)(\forall y)P(x,y)\big)$

Cvičenie 7.6. Pomocou pravdivostných tabuliek ukážte, že nasledujúca formula v jazyku predikátovej logiky s rovnosťou je 2-všeobecne platná, ale nie je 3-všeobecne platná:

$$(\neg(z=y)\wedge(\exists x)P(x))\Rightarrow(P(z)\vee P(y))$$

(Potrebujete uvažovať všetky možné ohodnotenia e voľných premenných a všetky možné interpretácie unárneho predikátu P.)

Cvičenie 7.7. Zostrojte formulu, ktorá je k-všeobecne platná, ale nie je $(k+1)$-všeobecne platná.

Cvičenie 7.8. Zostrojte formulu v jazyku predikátovej logiky bez rovnosti, ktorá je 2-všeobecne platná, ale nie je 3-všeobecne platná.

Cvičenie 7.9. Úvahou ukážte, že nasledujúce formuly sú logicky pravdivé.
a) $A\Rightarrow(\exists x)A$ b) $(\forall x)A\Rightarrow(\exists x)A$
c) $(\exists x)(A\Rightarrow B)\Rightarrow\big((\forall x)A\Rightarrow(\exists x)B\big)$
d) $\big((\forall x)A\Rightarrow(\exists x)B\big)\Rightarrow(\exists x)(A\Rightarrow B)$

Cvičenie 7.10. Úvahou ukážte, že ak x nie je voľná v B, tak nasledujúce formuly sú logicky pravdivé.
a) $(\forall x)(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow((\exists x)A\Rightarrow B)$ b) $(\exists x)(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow((\forall x)A\Rightarrow B)$

8 Predikátová logika, dokazovanie

V tejto kapitole si ukážeme odvodzovanie (dokazovanie) formúl predikátovej logiky z axióm pomocou odvodzovacích pravidiel a opíšeme si vyhodnocovanie formúl logiky prvého rádu pomocou sémantických stromov.

Formálny systém predikátovej logiky

Tak ako vo výrokovej logike, formálny systém predikátovej logiky tvorí jazyk predikátovej logiky, axiómy predikátovej logiky a odvodzovacie pravidlá. Jazyk sme opísali v predchádzajúcej kapitole, teraz zavedieme axiómy a odvodzovacie pravidlá.

Definícia. Nech je $\mathfrak{L}$ jazyk predikátovej logiky. Za axiómy predikátovej logiky považujeme:
Axiómy výrokovej logiky:

A1: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$,
A2: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$,
A3: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$,

kde A, B a C sú ľubovoľné formuly jazyka $\mathfrak{L}$.
Schému špecifikácie, ktorá pre ľubovoľnú formulu A, premennú x a term t substituovateľný do A za x, má tvar

ASŠ: $(\forall x)A \Rightarrow A_x[t]$.

Schému kvantifikácie implikácie, ktorá pre formuly A, B a premennú x, ktorá nie je voľná v A, má tvar

ASKI: $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$.

Definícia. Odvodzovacími pravidlami predikátovej logiky sú:
Modus ponens:

MP: z formúl A a $A \Rightarrow B$ odvoď formulu B.

Pravidlo zovšeobecnenia:

PZ: pre ľubovoľnú premennú x odvoď z formuly A formulu $(\forall x)A$.

Formulu $(\exists x)A$ považujeme len za skrátený zápis formuly $\neg\big((\forall x)\neg A\big)$ a spojky $\wedge$, $\vee$ a $\Leftrightarrow$ prepisujeme tak isto ako vo formálnom systéme výrokovej logiky.

Definícia. Symbolom $\vdash A$ značíme, že A možno odvodiť (dokázať) z axióm predikátovej logiky pomocou MP a PZ.

Keďže vo formálnom systéme predikátovej logiky sú obsiahnuté všetky axiómy výrokovej logiky a aj pravidlo modus ponens, tak všetky pravdivé formuly výrokovej logiky možno dokázať aj v predikátovej logike.

Definícia. Keď hovoríme o jazyku predikátovej logiky s rovnosťou, tak prijímame ešte nasledujúce axiómy:

E1: $(\forall x)(x = x)$.
E2: Pre každý n-árny funkčný symbol f platí $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)$ $\big([(x_1{=}y_1) \wedge \dots \wedge (x_n{=}y_n)] \Rightarrow [f(x_1,\dots,x_n) = f(y_1,\dots,y_n)]\big)$.
E3: Pre každý n-árny predikátový symbol p platí $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)$ $\big([(x_1{=}y_1) \wedge \dots \wedge (x_n{=}y_n)] \Rightarrow [p(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow p(y_1,\dots,y_n)]\big)$.

Všimnime si, že (E2) a (E3) nie sú formuly a teda to nie sú axiómy. Ide vlastne o schémy axióm, z ktorých vzniknú axiómy ak zvolíme za f (alebo p) konkrétnu funkciu (predikát).

Veta 8.1 (**o korektnosti**). *Nech je $\mathfrak{L}$ jazyk predikátovej logiky a nech je A formula v $\mathfrak{L}$. Ak je A dokázateľná vo formálom systéme predikátovej logiky, tak je logicky pravdivá (všeobecne platná).*

Dôkaz. Axiómy A1 až A3 sú tautológie výrokovej logiky a sú splnené v ľubovoľnej realizácii $\mathfrak{M}$ jazyka $\mathfrak{L}$ pri ľubovoľnom ohodnotení premenných. Preto sú A1, A2 a A3 logicky pravdivé a podľa Liem 7.4 a 7.3 sú logicky pravdivé aj zvyšné dve axiómy.

Podľa Tarského definície pravdivosti implikácie je modus ponens korektné pravidlo a podľa Lemy 7.2 je korektné aj pravidlo zovšeobecnenia. To znamená, že všetky formuly, ktoré tvoria dôkaz A, sú logicky pravdivé, a preto je logicky pravdivá aj posledná z nich, čiže A. □

Veta 8.1 tvrdí, že ak $\vdash A$, tak $\models A$. Platí však aj opačné tvrdenie: ak $\models A$, tak $\vdash A$, ako dokázal Gödel v tridsiatych rokoch dvadsiateho storočia. Veta 8.4 nižšie je zovšeobecnením tohoto výsledku.

Odvodzovanie formúl predikátovej logiky

Teraz si ukážeme niekoľko príkladov na dôkazy formúl predikátovej logiky.

Lema 8.2 (**pravidlo zavedenia** $\forall$). *Nech sú A a B formuly predikátovej logiky. Ak platí $\vdash A \Rightarrow B$ a x nemá voľný výskyt v A, tak platí $\vdash A \Rightarrow (\forall x)B$.*

Dôkaz.

1:	$\vdash A \Rightarrow B$	predpoklad
2:	$\vdash (\forall x)(A \Rightarrow B)$	PZ(1)
3:	$\vdash (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$	ASKI
4:	$\vdash (A \Rightarrow (\forall x)B)$	MP(2,3) □

Lema 8.3. *Pre ľubovoľnú formulu A a term t substituovateľný do A za x platí $\vdash A_x[t] \Rightarrow (\exists x)A$.*

Dôkaz.

1:	$\vdash (\forall x) \neg A \Rightarrow \neg A_x[t]$	ASŠ
2:	$\vdash \neg\neg(\forall x) \neg A \Rightarrow (\forall x) \neg A$	Lema 2.6
3:	$\vdash \neg\neg(\forall x) \neg A \Rightarrow \neg A_x[t]$	Syl(2,1)
$3'$:	$\vdash \neg(\exists x)A \Rightarrow \neg A_x[t]$	definícia $(\exists x)B$
4:	$\vdash (\neg(\exists x)A \Rightarrow \neg A_x[t]) \Rightarrow (A_x[t] \Rightarrow (\exists x)A)$	VOOI
5:	$\vdash A_x[t] \Rightarrow (\exists x)A$	MP($3'$,4) $\square$

Dokazovanie formúl predikátovej logiky nemusí byť vždy tak triviálne ako dokazovanie formúl vo výrokovej logike. Vo výrokovej logike sme totiž s výhodou využívali vetu o dedukcii, ktorú nemožno mechanicky zovšeobecniť na predikátovú logiku.

Hoci platí $A \vdash (\forall x)A$ (pravidlo zovšeobecnenia), tak neplatí $\vdash A \Rightarrow (\forall x)A$. Totiž ak by bola posledná formula dokázateľná, tak podľa Vety 8.1 o korektnosti by platilo $\models A \Rightarrow (\forall x)A$, čiže $A \Rightarrow (\forall x)A$ by bola splnená v každej realizácii jazyka predikátovej logiky, čo je v spore s realizáciou, ktorú sme zostrojili v Poznámke 1 za Lemou 7.2.

Ak je však A uzavretá formula, tak potom je možné dokázať, že $T \cup \{A\} \vdash B$ platí práve vtedy, keď platí $T \vdash A \Rightarrow B$.

Gödelova veta o úplnosti

V ďalšom sformulujeme základnú vetu predikátovej logiky, Gödelovu vetu o úplnosti. K tomu potrebujeme definovať ešte niekoľko pojmov.

Definícia. Ľubovoľne zvolenú množinu T formúl jazyka $\mathfrak{L}$ nazývame **teória** (**teória prvého rádu**) v jazyku $\mathfrak{L}$. Formuly z T nazývame **špeciálne** (**vlastné**) **axiómy** teórie T.

Realizáciu $\mathfrak{M}$ jazyka $\mathfrak{L}$ nazývame **modelom** teórie T práve vtedy, keď sú v nej splnené všetky axiómy teórie T, teda keď pre každé A z T platí $\mathfrak{M} \models A$. Ak je formula B splnená v každom modeli teórie T, tak B je **sémantický dôsledok** teórie T, čo zapisujeme $T \models B$.

Ak existuje dôkaz formuly A využívajúci axiómy teórie T ako predpoklady, tak A je **dokázateľná** v T, čo zapisujeme $T \vdash A$.

Príklad. Ak by sme chceli dokazovať tvrdenia v jazyku elementárnej aritmetiky, tak by sme dokazovali formuly A, pre ktoré $T \vdash A$, kde T obsahuje špeciálne axiómy elementárnej aritmetiky. Teda T by zrejme obsahovala formulu $(\forall x)(\forall y)(x{+}y{=}y{+}x)$ (komutatívny zákon pre sčítanie), ďalej by obsahovala formulu $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[z \cdot (x + y)] = (z \cdot x) + (z \cdot y)$ (distributívny zákon) a podobne.

Definícia. Teória, v ktorej je dokázateľná každá formula jazyka tejto teórie sa nazýva **sporná**. Ak teória nie je sporná, tak je **bezosporná** (**konzistentná**).

Nech je T teória v jazyku $\mathfrak{L}$ predikátovej logiky a nech je A formula v $\mathfrak{L}$. Potom ak $T \vdash A$, tak $T \models A$ (ide o jednoduché zovšeobecnenie Vety 8.1 o korektnosti). Teraz ak je teória T sporná, tak pre ľubovoľnú formulu B v jazyku $\mathfrak{L}$ platí $T \vdash B$ aj $T \vdash \neg B$, a preto $T \models B$ aj $T \models \neg B$. To znamená, že v každej realizácii $\mathfrak{M}$ teórie T je splnená aj formula B aj $\neg B$, a preto podľa Lemy 7.1 teória T nemá model. Zaujímavou je opačná implikácia: Ak teória T nie je sporná, tak má model.

VETA 8.4 (**Gödelova veta o úplnosti**). *V jazyku predikátovej logiky je teória bezosporná práve vtedy, keď má model.*

Dôkaz tohoto tvrdenia je ďaleko nad rámec nášho výkladu. Podobne bez dôkazu uvádzame aj nasledujúci dôsledok:

DÔSLEDOK. *Nech je T bezosporná teória a nech je A uzavretá formula v jazyku predikátovej logiky. Potom $T \models A$ platí práve vtedy, keď platí $T \vdash A$.*

Záverom tejto podkapitoly poznamenajme, že predikátová logika (logika prvého rádu) obsahuje len premenné pre indivíduá, ale už nie pre skupiny indivíduí, a preto takéto skupiny nemožno v jazyku prvého rádu ani kvantifikovať. Ak však rozšírime jazyk prvého rádu o premenné pre skupiny indivíduí, dostaneme jazyk logiky druhého rádu. Jazyk logiky tretieho rádu už obsahuje premenné pre skupiny skupín indivíduí a podobne.

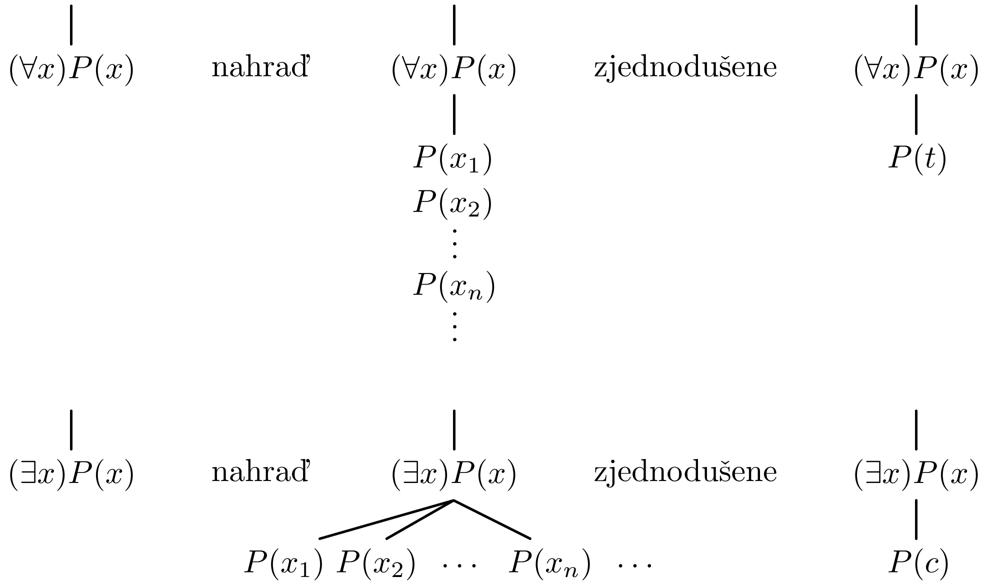
PRÍKLAD. V jazyku elementárnej aritmetiky nie sme schopní sformulovať tvrdenie: Každá konečná podmnožina množiny prirodzených čísel je ohraničená. To preto, lebo nemáme premenné pre skupiny prirodzených čísel.

Sémantické stromy

Metódu sémantických stromov pre výrokovú logiku rozšírime na predikátovú logiku. K pravidlám z Kapitoly 4 (pozri Obrázky 1, 3 a 4) pridáme pravidlá pre kvantifikátory. Pripomeňme, že ak univerzum $\mathcal{M}$ obsahuje prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, tak

$(\forall x)P(x)$	je iba skrátený zápis	$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n) \wedge \ldots$
$(\exists x)P(x)$	je skrátený zápis	$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n) \vee \ldots$.

Z toho plynú pravidlá zobrazené na Obrázku 27. Na pravej strane sú tieto pravidlá zjednodušené, aby sme nemali zbytočne pridlhý strom (v prípade všeobecného kvantifikátora), respektíve veľa paralelných vetiev (v prípade existenčného kvantifikátora). Tu pod t myslíme ľubovoľný prvok (hodnotu termu) z univerza $\mathcal{M}$, zatiaľ čo c je doposiaľ nepoužitý nulárny funkčný symbol (konštanta), čiže jeden konkrétny prvok z univerza $\mathcal{M}$. Ak sa všeobecný (existenčný) kvantifikátor vyskytne v danej vetve opakovane, používame symboly t', t'', t^*, ... (respektíve c', c'', c^*, ...).



Obrázok 27

Pri uzavieraní vetiev treba dávať pozor na to, ktoré tvrdenia sú v spore. Napríklad $P(c)$ a $\neg P(c')$ v spore nie sú (c a c' môžu byť rôzne indivíduá z univerza), zatiaľ čo $P(c)$ a $\neg P(t)$ v spore sú, pretože t je ľubovoľná hodnota z univerza $\mathcal{M}$, teda aj c. Ak však uvažujeme o dvojprvkovom nosiči, teda ak zisťujeme či je formula 2-všeobecne platná, tak je v spore aj pätica $P(c)$, $\neg P(c')$, $\neg P(c^*)$, $Q(c')$, $\neg Q(c^*)$.

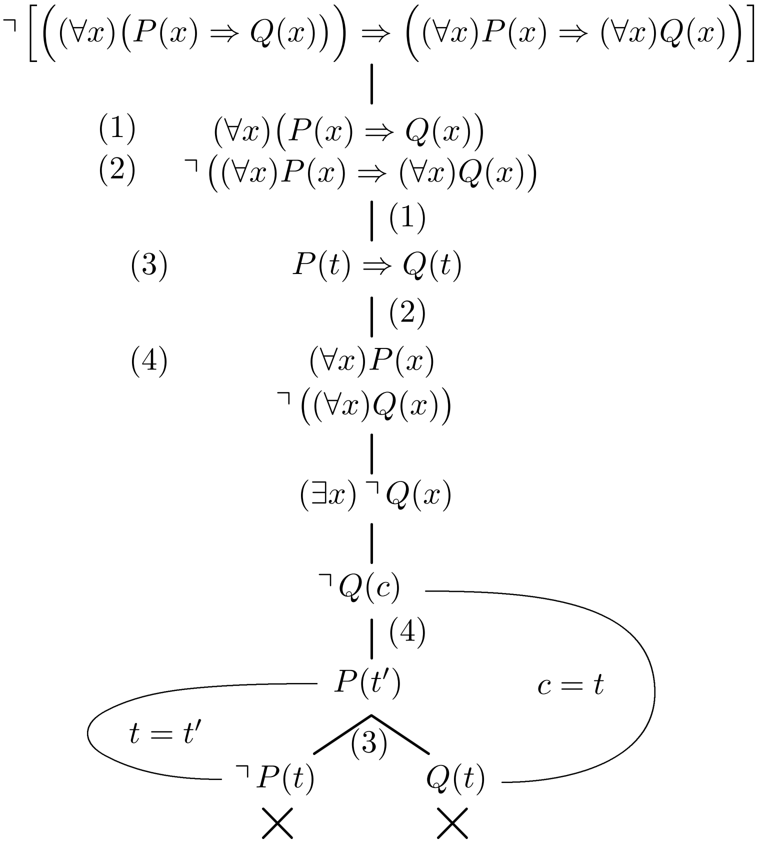
Tak ako v Kapitole 4, ak formulu v sémantickom strome nerozvíjame okamžite, tak ju očíslujeme a neskorší rozvoj podľa tejto formuly označíme jej číslom. Pre tautológie, kontradikcie a splniteľné formuly budeme využívať tvrdenia z Kapitoly 4.

Príklad. Pomocou sémantického stromu ukážte, že je formula A logicky pravdivá

$$A: \ \Big((\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big) \Rightarrow \Big((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)\Big).$$

Podľa Vety 4.3 (2) stačí ukázať, že sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté.

Sémantický strom pre $\neg A$ je na Obrázku 28. V ľavej vetve máme $P(t')$ a $\neg P(t)$, pričom t a t' sú ľubovoľné prvky z univerza, čo je zjavne v spore. Preto je ľavá vetva uzavretá. V pravej vetve máme $\neg Q(c)$ a $Q(t)$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza, teda aj c, čo je opäť v spore. Preto je uzavretá aj pravá vetva. Keďže sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté, formula A je logicky pravdivá.



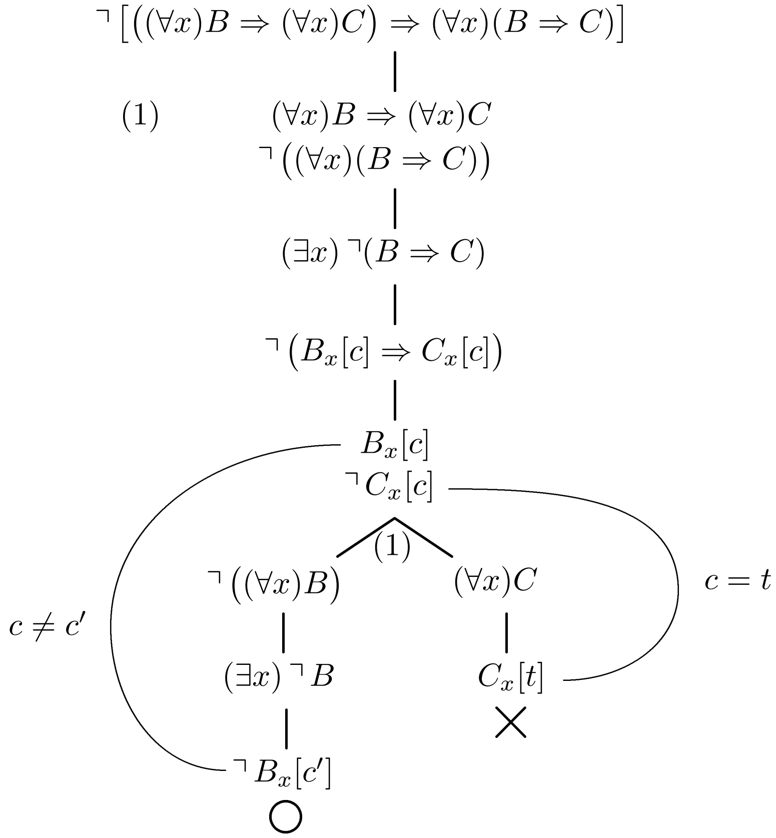
Obrázok 28

Príklad. Pomocou sémantického stromu ukážte, že formula A nie je logicky pravdivá

$$A: \ \big((\forall x)B \Rightarrow (\forall x)C\big) \Rightarrow (\forall x)(B \Rightarrow C)\,.$$

Opäť použijeme Vetu 4.3 (2), čiže zistíme, či sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté. Tak ako v predchádzajúcej kapitole, výrazom $D_x[a]$ označujeme, že premenná x nadobúda vo formule D hodnotu a.

Sémantický strom pre $\neg A$ je na Obrázku 29. V pravej vetve máme $\neg C_x[c]$ a $C_x[t]$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza, teda aj c, čo spor. Preto je pravá vetva uzavretá. Avšak v ľavej vetve máme iba $B_x[c]$ a $\neg B_x[c']$. Ak $c \neq c'$, tak tu spor nemáme, preto je ľavá vetva otvorená. Znamená to, že A nie je logicky pravdivá.

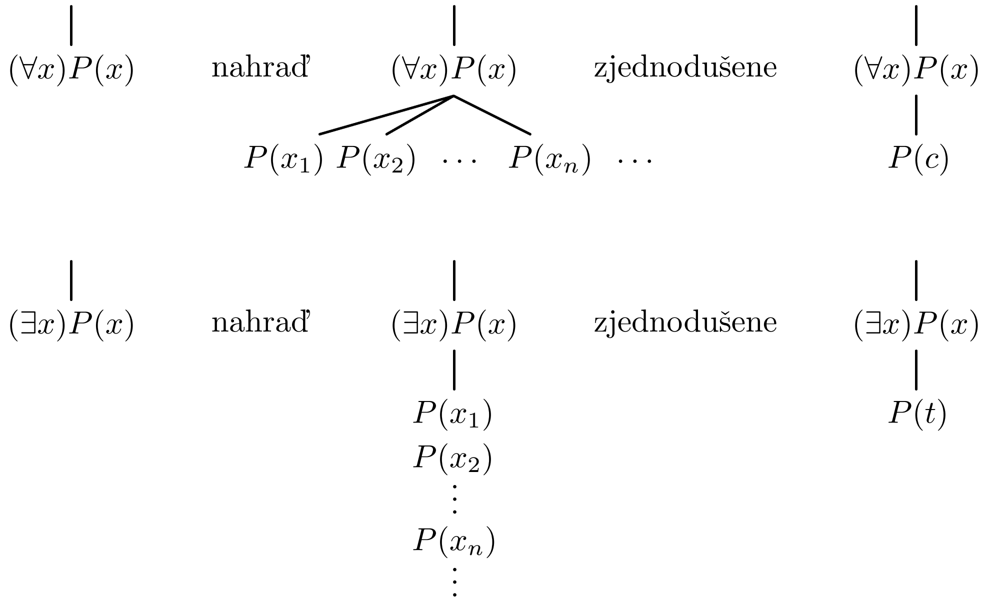


Obrázok 29

Všimnime si, že ak by malo univerzum $\mathcal{M}$ iba jedno indivíduum, bola by uzavretá aj ľavá vetva sémantického stromu na Obrázku 29. Znamená to, že A je 1-všeobecne platná, hoci nie je všeobecne platná.

Duálne sémantické stromy

Podobne môžeme rozšíriť duálne sémantické stromy výrokovej logiky na duálne sémantické stromy predikátovej logiky. K pravidlám z Kapitoly 4, pozri Obrázok 8, pridáme pravidlá pre kvantifikátory, pozri Obrázok 30. Tu pod t myslíme ľubovoľný prvok z univerza, zatiaľ čo c je doposiaľ nepoužitý symbol pre konštantu. Všimnime si rozdiel medzi pravidlami pre sémantické stromy (Obrázok 27) a duálne sémantické stromy (Obrázok 30).



Obrázok 30

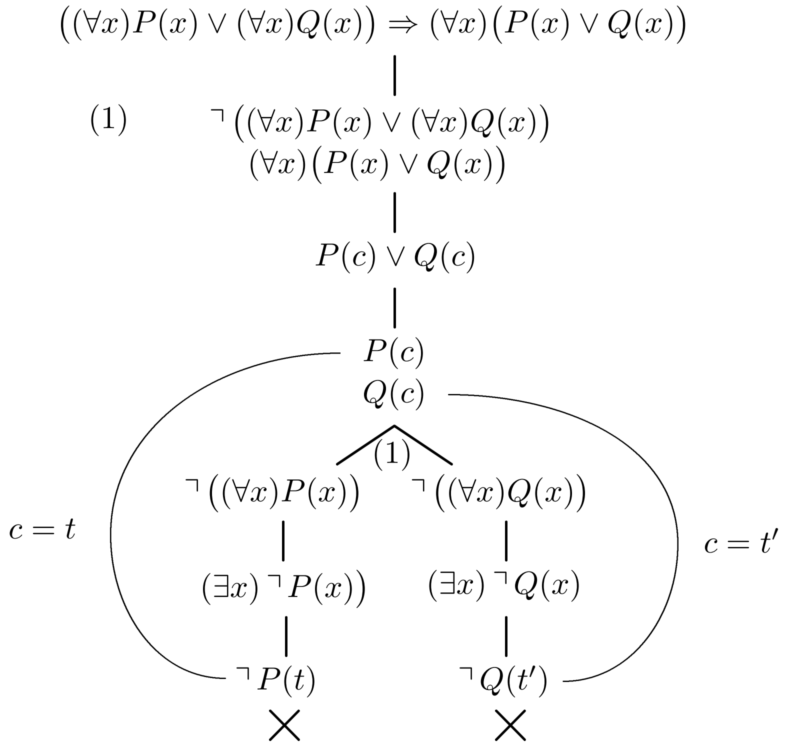
Príklad. Pomocou duálneho sémantického stromu ukážte, že je formula A logicky pravdivá

$$A:\ \big((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)\,.$$

Podľa Vety 4.5 (2) stačí ukázať, že sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre A uzavreté.

Duálny sémantický strom pre A je na Obrázku 31. V ľavej vetve máme $P(c)$ a $\urcorner P(t)$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza, teda aj c, čo spor. Preto je ľavá vetva uzavretá. V pravej vetve máme $P(c)$ a $\urcorner P(t)$, takže je uzavretá aj táto vetva. Keďže sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre A uzavreté, formula A je logicky pravdivá.

Nasledujúci príklad ukazuje, že keď konštruujeme sémantické stromy pre formuly predikátovej logiky, musíme byť oveľa opatrnejší, ako pri formulách výrokovej logiky.



Obrázok 31

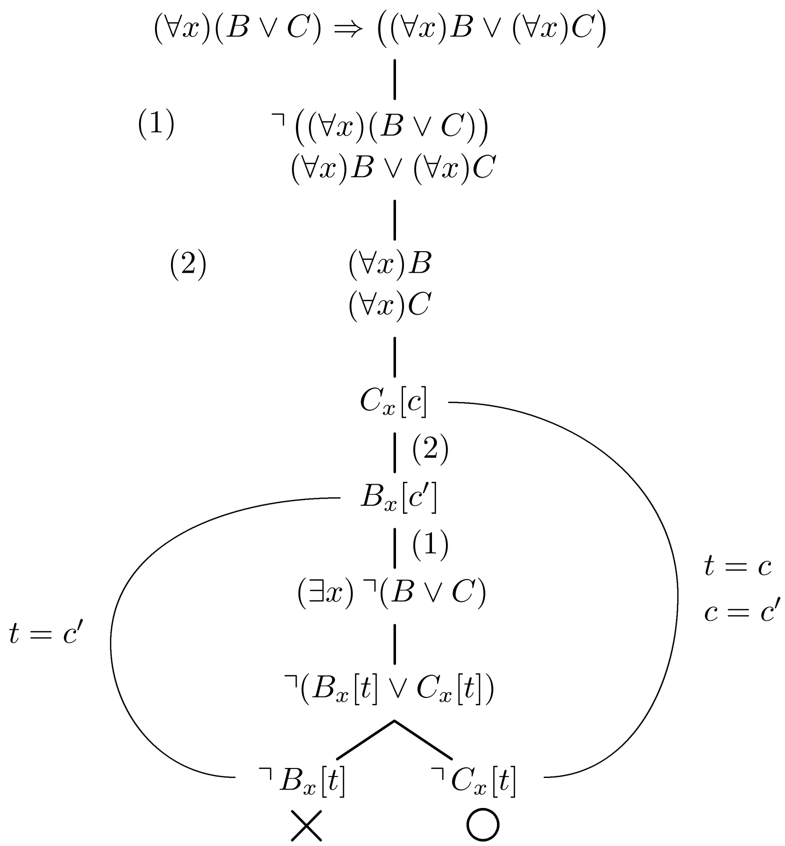
Príklad. Pomocou duálneho sémantického stromu zistite, či je formula A logicky pravdivá

$$A:\ (\forall x)(B \vee C) \Rightarrow \big((\forall x)B \vee (\forall x)C\big)\,.$$

Opäť budeme zisťovať, či sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre A uzavreté.

Duálny sémantický strom pre A je na Obrázku 32. V ľavej vetve máme $B_x[c']$ a $\neg\,B_x[t]$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza. Teda keď $c' = t$, dostávame spor a ľavá vetva je uzavretá. Naopak, v pravej vetve máme $C_x[c]$ a $\neg\,C_x[t]$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza. Tu opäť dostávame spor, ale iba keď $c = t$. Keďže už máme $c' = t$, dostali sme $c' = c$. Teda obidve vetvy sú uzavreté iba keď $c' = c$ $(= t)$, čo nemusí nutne platiť. Čo sa deje v ostatných prípadoch?

Pozrime sa na to lepšie a vráťme sa k Obrázku 30. Namiesto $\neg(B_x[t] \vee C_x[t])$ by sme mali písať stĺpček $\neg(B_x[c] \vee C_x[c])$, $\neg(B_x[c'] \vee C_x[c'])$, … pre všetky prvky z univerza $\mathcal{M}$. Teraz keď rozvinieme $\neg(B_x[c] \vee C_x[c])$, dostaneme dve vetvy, pričom pravá vetva bude uzavretá kvôli dvojici $C_x[c]$ a $\neg\,C_x[c]$, no v ľavej spor zatiaľ nie je. Preto ju rozvinieme podľa $\neg(B_x[c'] \vee C_x[c'])$. Tu bude uzavretá pre zmenu ľavá vetva kvôli dvojici $B_x[c']$ a $\neg\,B_x[c']$, ale nie pravá. Takže túto vetvu, v ktorej zatiaľ máme $C_x[c]$, $B_x[c']$, $\neg\,B_x[c]$ a $\neg\,C_x[c']$, potrebujeme ďalej rozvíjať. Lenže pri ďalšom rozvoji formuly $\neg(B_x[t] \vee C_x[t])$ podľa ostatných prvkov univerza už spor nedostaneme, iba nové a nové vetvy. Preto je vetva, v ktorej zatiaľ máme $C_x[c]$, $B_x[c']$, $\neg\,B_x[c]$ a $\neg\,C_x[c']$, otvorená. To znamená, že formula A nie je logicky pravdivá.



Obrázok 32

Cvičenia

Cvičenie 8.1. Pomocou sémantických stromov ukážte, že sú nasledujúce formuly logicky pravdivé.

a) $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)P(y)$

b) $(\forall x)A \Rightarrow (\exists x)A$

c) $\neg((\forall x)A) \Leftrightarrow ((\exists x)\neg A)$

d) $\neg((\exists x)A) \Leftrightarrow ((\forall x)\neg A)$

Cvičenie 8.2. Pomocou duálnych sémantických stromov ukážte, že sú nasledujúce formuly logicky pravdivé.

a) $\big((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

b) $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow \big((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)\big)$

Cvičenie 8.3. Pomocou (duálnych) sémantických stromov ukážte, že sú nasledujúce formuly logicky pravdivé.

a) $(\forall x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Leftrightarrow \big((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)\big)$

b) $(\exists x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Leftrightarrow \big((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)\big)$

c) $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow \big((\exists x)A \wedge (\exists x)B\big)$

d) $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B\big)$

e) $\big((\exists x)(A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow \big((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B\big)$

f) $\big((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B\big) \Rightarrow \big((\exists x)(A \Rightarrow B)\big)$

Cvičenie 8.4. Pomocou (duálnych) sémantických stromov zistite, či sú nasledujúce formuly logicky pravdivé.
a) $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$
b) $\big((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$
c) $(\forall x)(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x)(A \vee \neg B)$
d) $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow \big((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B\big)$

Cvičenie 8.5. Pomocou (duálnych) sémantických stromov ukážte, že ak x nie je voľná v B, tak sú nasledujúce formuly logicky pravdivé. (Keďže x nie je voľná v B, tak pre túto podformulu postupujeme ako v Kapitole 4.)
a) $\big((\forall x)(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow \big(((\exists x)A) \Rightarrow B\big)$ b) $\big((\exists x)(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow \big(((\forall x)A) \Rightarrow B\big)$

Cvičenie 8.6. Zostrojte duálny sémantický strom pre formulu

$$A: \ \big(Q(z) \wedge \neg Q(y) \wedge (\exists x)P(x)\big) \Rightarrow \big(P(z) \vee P(y)\big).$$

Viete z neho usúdiť, že A je 2-všeobecne platná, ale nie 3-všeobecne platná?

9 Sekventový kalkulus

V Kapitolách 2 a 8 sme zostrojovali pravdivé formuly syntakticky, z axióm pomocou odvodzovacích pravidiel. Vo výrokovej logike sme používali axiómy A1, A2 a A3 a odvodzovacie pravidlo modus ponens. V predikátovej logike sme k týmto trom axiómam pridali ešte schému špecifikácie a schému kvantifikácie implikácie a k odvodzovaciemu pravidlu modus ponens sme pridali pravidlo zovšeobecnenia. V tejto kapitole budeme zostrojovať pravdivé formuly pomocou sekventov. Tento syntaktický postup sa nazýva *Gentzenovský kalkulus*, alebo tiež *sekventový kalkulus*, zatiaľ čo postup z Kapitol 2 a 8 sa nazýva *Hilbertovský kalkulus*. Gentzenovský kalkulus je na prvý pohľad komplikovanejší a menej intuitívny ako Hilbertovský kalkulus, je však oveľa vhodnejší na odvodzovanie formúl mechanicky, pomocou počítača.

Sekventy

Najprv zavedieme pojem sekventu a objasníme si jeho význam (sémantiku).

Definícia. **Sekvent** je konečná postupnosť zložená z formúl a symbolu $\vdash$. Formuly pred symbolom $\vdash$ nazývame **antecedent** (**predpoklady**) a formuly za symbolom $\vdash$ nazývame **succedent** (**dôsledky**).

Teraz si objasníme význam sekventu, preto v zostávajúcej časti tejto podkapitoly nahradíme symbol $\vdash$ symbolom $\models$.

Význam sekventu

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B_1, B_2, \ldots, B_l \tag{1}$$

je, že ak platia všetky formuly $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (čiže ak platia všetky predpoklady), tak platí aspoň jedna formula z $B_1, B_2, \ldots, B_l$ (teda platí aspoň jeden dôsledok). Sekventy sú teda rozšírením vzťahov $A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$ s jediným dôsledkom, ktoré nazývame *vzťahy prirodzenej dedukcie*.

V súlade s touto interpretáciou, význam sekventu $\models B$ je „formula B je pravdivá". Naopak, $A_1, A_2, \ldots, A_k \models$ má význam „nemôžu platiť súčasne všetky predpoklady". Sekvent bez predpokladov a dôsledkov „$\models$" sa definuje ako nepravdivý.

Interpretácia sekventu (1) je trochu zvláštna, umožňuje však dualitu medzi predpokladmi a dôsledkami. Všimnime si, že sekvent (1) je ekvivalentný sekventu

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \models B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_l,$$

ktorý tvrdí, že ak platí $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$, tak platí $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_l$.Ináč povedané, platí

$$\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \Rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_l),$$

čo je ekvivalentné s

$$\models \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_k \vee B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_l. \tag{2}$$

V reči sekventov je (2) ekvivalentné so sekventom

$$\models \neg A_1, \neg A_2, \ldots, \neg A_k, B_1, B_2, \ldots, B_l. \tag{3}$$

Keďže $\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_k \vee B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_l$ je podľa (2) vždy pravdivá formula (tautológia), tak jej negácia je kontradikciou. To znamená, že sekvent (2) je ekvivalentný so sekventom

$$\neg(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_k \vee B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_l) \models .$$

Použitím de Morganových pravidiel na predpoklad dostávame

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_2 \wedge \ldots \wedge \neg B_l \models,$$

čo v reči sekventov znamená

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B_1, \neg B_2, \ldots, \neg B_l \models . \tag{4}$$

Znamená to, že sekvent (1) je ekvivalentný so sekventammi (3) a (4), pričom sekventy (3) a (4) ukazujú dualitu medzi predpokladmi a dôsledkami.

V ďalšom budeme uvažovať Gentzenovskú výrokovú logiku. Gentzenovskú predikátovú logiku si opíšeme neskôr.

Odvodzovacie pravidlá Gentzenovskej výrokovej logiky

Na rozdiel od Hilbertovského kalkulu, Gentzenovský kalkulus má iba jednu jedinú axiómu, má však veľa odvodzovacích pravidiel. Aby sme odlíšili tieto dva kalkuly, v sekventovom kalkule budeme jednotlivé kroky odvodenia oddeľovať horizontálnou čiarou. Potom axióma je odvodzovacie pravidlo, ktoré má nad horizontálnou čiarou prázdny výraz. Takýmto spôsobom môžeme axiómu považovať za špeciálne odvodzovacie pravidlo, ktoré tvrdí: „Z ničoho odvoď axiómu".

Nech sú Γ, Δ, Σ a Π konečné (hoci prázdne) postupnosti formúl a nech sú A a B formuly. Potom sekventový kalkulus má tieto pravidlá:

Axióma

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I})$$

Pravidlo Cut

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma, A \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi}\ (\mathrm{Cut})$$

Ľavé logické pravidlá

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \mathrm{L}_1)$$

Pravé logické pravidlá

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee \mathrm{R}_1)$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge L_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee R_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A \vee B \vdash \Delta, \Pi}\ (\vee L) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A \wedge B, \Delta, \Pi}\ (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Pi}\ (\Rightarrow L) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\Rightarrow R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg L) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\neg R)$$

Ľavé štrukturálne pravidlá

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (WL)$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (CL)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \vdash \Delta}\ (PL)$$

Pravé štrukturálne pravidlá

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (WR)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (CR)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Pi}\ (PR)$$

Pravidiel je veľa, preto si ich objasníme.

Štrukturálne pravidlá obsahujú pravidlá oslabenia (WL) a (WR). Je zrejmé, že ak platí $\Gamma \vdash \Delta$, tak ako predpoklady, tak aj dôsledky možno zoslabiť pridaním ďalšej formuly. Zvyšné dve dvojice pravidiel, pravidlá kontrakcie (CL) a (CR) a permutačné pravidlá (PL) a (PR) vlastne tvrdia, že na poradí a násobnosti formúl v predpokladoch, respektíve dôsledkoch, nezáleží. Takže sekventy by sa dali definovať pomocou množín namiesto postupností, avšak pre algoritmizáciu je pojem postupnosti výhodnejší.

Axióma identity (I) je triviálna, všimnime si však pravidlo (Cut). Najprv, sekvent $\Sigma, A \vdash \Pi$ je ekvivalentný so sekventom $\Sigma \vdash \neg A, \Pi$. Keby platilo $\Gamma \vdash \Delta$ alebo $\Sigma \vdash \Pi$, tak potom aj $\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi$ (použijeme pravidlá oslabenia). Predpokladajme preto, že $\Gamma \nvdash \Delta$ a $\Sigma \nvdash \Pi$. Potom však nutne $\Gamma \vdash A$ a $\Sigma \vdash \neg A$, čo znamená, že Γ, Σ je sporná, a preto $\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi$ (bez ohľadu na to, či sú Δ a Π prázdne, alebo neprázdne). Všimnime si, že v najjednoduchšej forme: z $B \vdash A$ a $A \vdash C$ odvoď $B \vdash C$, sa pravidlo (Cut) podobá na pravidlo sylogizmu.

Prejdime teraz k logickým pravidlám. Pravidlá ($\neg$L) a ($\neg$R) sme vysvetlili už v predchádzajúcej podkapitole. Pravidlo ($\Rightarrow$R) je časťou vety o dedukcii a ostatné logické pravidlá sú dvoch typov. Tie, ktoré majú konjunkciu v predpokladoch ($\wedge L_1$) a ($\wedge L_2$) a tie, ktoré majú disjunkciu v dôsledkoch ($\vee R_1$) a ($\vee R_2$) sú vlastne zoslabenia. Zvyšné pravidlá ($\vee$L) a ($\wedge$R) majú disjunkciu v predpokladoch alebo konjunkciu v dôsledkoch a tieto pravidlá dostaneme z dvojíc sekventov. Podobný tvar má aj pravidlo ($\Rightarrow$L), pretože $A \Rightarrow B$ možno chápať ako $\neg A \vee B$.

Na záver si všimnime, že formuly, s ktorými sa v pravidlách „čosi deje", sú vždy zapísané hneď pri symbole $\vdash$. Výnimkou sú permutačné pravidlá (PL) a (PR).

Odvodenia výrokových formúl

V tejto časti si ukážeme, ako sa dajú odvodzovať formuly pomocou sekventov. Jednotlivé kroky budeme oddeľovať horizontálnymi čiarami, pričom napravo od čiary napíšeme, ktorým pravidlom sme nasledujúcu formulu odvodili. Odvodenie budeme zapisovať štandardne zhora nadol, no formuly sa odvodzujú naopak, čiže zdola nahor. Teda ako prvú si kamsi dolu napíšeme formulu, ktorú chceme odvodiť. Potom túto formulu zjednodušujeme postupujúc nahor, až prídeme k axióme. Preto je vhodné pamätať si odvodzovacie pravidlá zdola nahor a nie naopak. Budeme dodržiavať poradie sekventov uvedené v pravidlách ($\vee$L), ($\wedge$R), ($\Rightarrow$L) a (Cut).

Začneme s jednoduchými formulami, ktoré obsahujú iba negácie a implikácie.

Lema 9.1. *Platí* $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$.

Dôkaz.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(\mathrm{I})}{\vdash \neg A, A}\,(\neg\mathrm{R})}{\neg\neg A \vdash A}\,(\neg\mathrm{L})}{\vdash \neg\neg A \Rightarrow A}\,(\Rightarrow\mathrm{R})$$

□

Lema 9.2. *Platí* $A, A \Rightarrow B \vdash B$, *čiže pravidlo modus ponens.*

Dôkaz.

$$\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(\mathrm{I}) \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,(\mathrm{I})}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\,(\Rightarrow\mathrm{L})$$

□

Práve odvodené pravidlo modus ponens by sme mohli v ďalšom využívať. Lenže tým by sme skrátili dôkaz iba o jeden jediný riadok, preto toto pravidlo využívať nebudeme. Nebudeme vlastne využívať žiadne pravidlo, či lemu, okrem tých, ktoré sme opísali v predchádzajúcej podkapitole.

V dôkaze Lemy 9.2 si všimnime, ako sme rozložili implikáciu z predpokladov. Tento rozklad sme spravili tak, aby sme dostali napravo aj naľavo dokázateľné formuly. Teda z $A, A \Rightarrow B \vdash B$ sme nezostrojili predchádzajúce sekventy $A, B \vdash$ a $\vdash A, B$, ani $A, B \vdash B$ a $\vdash A$, lebo v prvom prípade žiaden z nich nie je pravdivý a v druhom síce ľavý pravdivý je, ale pravý nie je. Túto črtu si ukážeme aj na nasledujúcom príklade. Aby sa dal dôkaz lepšie sledovať, formuly, na ktoré sme aplikovali pravidlo ($\Rightarrow$L), sme podčiarkli. Z pohodlnosti, pod (PL) respektíve (PR) budeme rozumieť ľubovoľnú permutáciu predpokladov, respektíve dôsledkov.

LEMA 9.3. *Platí A2, čiže* $\vdash \big(A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C)\big) \Rightarrow \big((A{\Rightarrow}B) \Rightarrow (A{\Rightarrow}C)\big)$.

DÔKAZ.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{(WR)}
\UnaryInfC{$A \vdash C, A$}
\RightLabel{($\Rightarrow$R)}
\UnaryInfC{$\vdash A{\Rightarrow}C, A$}
\RightLabel{(PR)}
\UnaryInfC{$\vdash \underline{A}, A{\Rightarrow}C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$A \vdash \underline{A}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$B \vdash \underline{B}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$\underline{C} \vdash C$}
\RightLabel{($\Rightarrow$L)}
\BinaryInfC{$B, \underline{B{\Rightarrow}C} \vdash C$}
\RightLabel{($\Rightarrow$L)}
\BinaryInfC{$A, B, \underline{A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C)} \vdash C$}
\RightLabel{(PL)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C), B, A \vdash C$}
\RightLabel{($\Rightarrow$R)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C), \underline{B} \vdash A{\Rightarrow}C$}
\RightLabel{($\Rightarrow$L)}
\BinaryInfC{$A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C), \underline{A{\Rightarrow}B} \vdash A{\Rightarrow}C, A{\Rightarrow}C$}
\RightLabel{(CR)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C), A{\Rightarrow}B \vdash A{\Rightarrow}C$}
\RightLabel{($\Rightarrow$R)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C) \vdash (A{\Rightarrow}B) \Rightarrow (A{\Rightarrow}C)$}
\RightLabel{($\Rightarrow$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \big(A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C)\big) \Rightarrow \big((A{\Rightarrow}B) \Rightarrow (A{\Rightarrow}C)\big)$}
\end{prooftree}
\qquad \square
$$

Ako by vyzeralo odvodenie A2, keby sme dôsledne rozkladali formulu a v treťom kroku odspodu by sme zostrojili sekvent $A \Rightarrow (B{\Rightarrow}C), A{\Rightarrow}B, A \vdash C$?

Teraz si ukážeme odvodenia s využitím pravidiel pre konjunkciu a disjunkciu. Kvôli jednoduchosti, namiesto ($\wedge$L$_1$) a ($\wedge$L$_2$) budeme písať iba ($\wedge$L) a namiesto ($\vee$R$_1$) a ($\vee$R$_2$) budeme písať ($\vee$R).

LEMA 9.4. *Platí zákon vylúčenia tretieho, čiže* $\vdash A \vee \neg A$.

DÔKAZ.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(I)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, A$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\vdash A \vee \neg A, A$}
\RightLabel{(PR)}
\UnaryInfC{$\vdash A, A \vee \neg A$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A$}
\RightLabel{(CR)}
\UnaryInfC{$\vdash A \vee \neg A$}
\end{prooftree}
\qquad \square
$$

Pozrime sa lepšie na pravidlá ($\wedge$L) a ($\vee$R). Tieto pravidlá vlastne tvrdia, že z $\Gamma, A, B \vdash \Delta$ sa dá odvodiť $\Gamma, A{\wedge}B \vdash \Delta$ a z $\Gamma \vdash A, B, \Delta$ sa dá odvodiť $\Gamma \vdash A{\vee}B, \Delta$. Túto vlastnosť pekne vidno v predchádzajúcom dôkaze zákona vylúčenia tretieho.

VETA 9.5. *Nech sú* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *a* B *formuly. Potom* $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ *platí práve vtedy, keď platí* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B$.

DÔKAZ. Máme dokázať ekvivalenciu dvoch sekventov. Najprv predpokladajme, že platí $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$. Dokážeme, že potom $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B$. Aby sme zachovali štruktúru dôkazu a vyhli sa prácnemu opakovaniu formúl, budeme robiť naraz trojice krokov. (PL)($\wedge$L)(PL) znamená, že najprv formuly vhodne poprehadzujeme, vzápätí aplikujeme pravidlo ($\wedge$L) a potom formuly opäť poprehadzujeme. V dôkaze sa opakujú trojice krokov. Pre jednoduchšiu identifikáciu sme kroky na ľavej strane očíslovali a formuly, na ktoré sme aplikovali pravidlo ($\wedge$L), sme podčiarkli.

$$\begin{array}{lcl}
 & \overline{\hspace{5cm}} & \text{(predpoklad)}\\
0: & \underline{A_1}, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n \vdash B & \\
 & \overline{\hspace{5cm}} & \text{(PL)}(\wedge\text{L})\text{(PL)}\\
 & A_1 \wedge A_2, \underline{A_2}, A_3, A_4, \ldots, A_n \vdash B & \\
 & \overline{\hspace{5cm}} & \text{(PL)}(\wedge\text{L})\text{(PL)}\\
 & A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n \vdash B & \\
 & \overline{\hspace{5cm}} & \text{(PL)(CL)(PL)}\\
1: & \underline{A_1 \wedge A_2}, A_3, A_4, \ldots, A_n \vdash B & \\
 & \overline{\hspace{5cm}} & \text{(PL)}(\wedge\text{L})\text{(PL)}\\
 & A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \underline{A_3}, A_4, \ldots, A_n \vdash B & \\
 & \overline{\hspace{5cm}} & \text{(PL)}(\wedge\text{L})\text{(PL)}\\
 & A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, A_4, \ldots, A_n \vdash B & \\
 & \overline{\hspace{5cm}} & \text{(PL)(CL)(PL)}\\
2: & A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, A_4, \ldots, A_n \vdash B & \\
 & \overline{\hspace{5cm}} & \\
 & \vdots & \text{analogický postup}\\
 & \overline{\hspace{5cm}} & \\
n-1: & A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B &
\end{array}$$

Teraz naopak predpokladajme, že platí $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B$. Dokážeme, že potom $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$. Predpoklad sme označili skratkou (pr).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A_1 \vdash A_1}\text{(I)} \qquad \dfrac{}{A_2 \vdash A_2}\text{(I)}}{A_1, A_2 \vdash A_1 \wedge A_2}(\wedge\text{R}) \qquad \dfrac{}{A_3 \vdash A_3}\text{(I)}}{A_1, A_2, A_3 \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge A_3}(\wedge\text{R})}{\vdots \quad \text{analogický postup}}}{A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n} \qquad \dfrac{}{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B}\text{(pr)}}{A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B}\text{(Cut)} \qquad \square$$

Všimnime si, že aj pri tak zložitom tvrdení ako v predchádzajúcej vete, sme nepotrebovali využiť žiadne pomocné tvrdenia. Toto je jedna z výhod sekventového kalkulu.

Vlastnosti Gentzenovskej výrokovej logiky

V tejto kapitole sme zaviedli Gentzenovský kalkulus, ktorý je iný ako klasický Hilbertovský kalkulus. Otázkou je, či sa pomocou sekventového kalkulu dajú odvodiť všetky pravdivé formuly a žiadne iné.

Definícia. Nech sú Γ a Δ konečné postupnosti formúl. Sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ sa nazýva **tautologický**, ak pre každé ohodnotenie ν prvotných formúl, pre ktoré $\overline{\nu}(A) = 1$ pre všetky formuly A z Γ, existuje formula B z Δ, pre ktorú platí $\overline{\nu}(B) = 1$.

Nasledujúca veta ukazuje, že Gentzenovský kalkulus bol zostrojený správne.

Veta 9.6 (**o úplnosti Gentzenovského kalkulu**). *Nech sú Γ a Δ konečné postupnosti formúl. Sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ je odvoditeľný v Gentzenovskom kalkule práve vtedy, keď je tautologický.*

Všimnime si, že Veta 9.6 tvrdí viac, ako Veta 3.8 o úplnosti Hilbertovského kalkulu, pretože Veta 3.8 sa zaoberá iba prípadmi, keď Δ obsahuje nanajvýš jednu formulu.

Ako sme spomínali, Gentzenovský kalkulus je vhodný na automatické dokazovanie počítačom. To preto, lebo pri postupe „zdola nahor“ je použitie pravidiel v podstate mechanické. Jedinou výnimkou je pravidlo (Cut). Dôvodom je to, že keď postupujeme „zdola nahor“, tak nie je vôbec zrejmé, ako máme voliť formulu A, pozri pravidlo (Cut). Preto má veľký význam nasledujúce tvrdenie.

Veta 9.7 (**o eliminácii rezov**). *Každý sekvent odvoditeľný v Gentzenovskom kalkule je v tomto kalkule odvoditeľný aj bez použitia pravidla (Cut).*

Poznamenajme, že hoci Veta 9.7 tvrdí, že sa každý sekvent odvoditeľný v Gentzenovskom kalkule dá v tomto kalkule odvodiť aj bez pravidla (Cut), tak netvrdí, že sa dá odvodiť bez pravidla (Cut) „rovnako rýchlo“. Pravidlo (Cut), hoci vo forme pravidla sylogizmu, sa často využije, keď nebudeme odvodzovať formulu mechanicky, ale stanovíme si postupnosť krokov, ktoré nás k odvodeniu dovedú.

Gentzenovská predikátová logika

V klasickom Hilbertovskom kalkule sme syntaktický systém predikátovej logiky získali rozšírením syntaktického systému výrokovej logiky. K axiómam A1, A2 a A3 sme pridali schému špecifikácie a schému kvantifikácie implikácie a k odvodzovaciemu pravidlu modus ponens sme pridali pravidlo zovšeobecnenia. Podobne možno z pravidiel Gentzenovského kalkulu pre výrokovú logiku získať pravidlá Gentzenovského kalkulu pre predikátovú logiku. K tomu stačí pridať nasledujúce štyri pravidlá.

Nech sú Γ a Δ konečné postupnosti formúl predikátovej logiky a nech je A formula predikátovej logiky. Nové pravidlá sú

$$\frac{\Gamma, A_x[r] \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x)A \vdash \Delta}\ (\forall \mathrm{L}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A_x[r], \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x)A, \Delta}\ (\exists \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, A_x[y] \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x)A \vdash \Delta}\ (\exists \mathrm{L}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A_x[y], \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x)A, \Delta}\ (\forall \mathrm{R})$$

pričom v pravidlách ($\forall$L) a ($\exists$R) je jedinou požiadavkou aby bol term r substituovateľný do A za x, avšak v pravidlách ($\exists$L) a ($\forall$R) požadujeme, aby bola premenná y substituovateľná do A za x a naviac táto premenná nesmie mať žiaden voľný výskyt v Γ, Δ ani v $(\exists x)A$ (respektíve $(\forall x)A$).

Všimnime si, že požiadavka na substituovateľnosť je formulovaná pre odvodenie „zdola nahor“. Tieto pravidlá sú prirodzené v tom, že aj dôkaz človekom ide podobne. Najprv sa zbavíme kvantifikátorov a dokážeme tvrdenie s voľnými premennými, pričom kvantifikátory zavedieme až v závere dôkazu.

V jazyku elementárnej aritmetiky môžu kroky odvodenia pomocou ($\exists$R) vyzerať napríklad takto:

$$\dfrac{\Gamma \vdash S(S(v)) < S(v), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x)(x < S(v)), \Delta}\,(\exists\mathrm{R}) \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash S(S(v)) < S(v), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x)(S(x) < x), \Delta}\,(\exists\mathrm{R})$$

a to bez ohľadu na to, aký tvar majú formuly v Γ a Δ. V ľavom prípade sme volili za term t výraz $S(S(v))$, v pravom $S(v)$. Porovnajte významy výsledných sekventov.

Teraz si ukážeme príklad odvodenia formuly predikátovej logiky.

Lema 9.8. *Nech je P unárny predikát. Potom* $\vdash (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)\big)$.

Dôkaz. Keď budeme postupovať „zdola nahor“ najtriviálnejším možným spôsobom, dostaneme

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{*}{P(z) \vdash (\forall y)P(y)}\,(?)}{\vdash P(z) \Rightarrow (\forall y)P(y)}\,(\Rightarrow\mathrm{R})}{\vdash (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)\big)}\,(\exists\mathrm{R})$$

pričom miesto $*$ by sme chceli písať $P(z) \vdash P(z)$, čo je axióma (I). Problém je v tom, že z $P(z) \vdash P(z)$ pomocou ($\forall$R) nemôžeme odvodiť $P(z) \vdash (\forall y)P(y)$, pretože z je voľná aj vo formule naľavo od $\vdash$. Tento postup bol teda neúspešný. Dôvodom bolo, že už druhá formula $\vdash P(z) \Rightarrow (\forall y)P(y)$ nie je vždy pravdivá. Potrebujeme preto vymyslieť sofistikovanejší postup.

V nasledujúcom dôkaze sme odvodenie sekventu $\vdash (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)\big)$ rozdelili na dve časti. Najprv sme tento sekvent odvodili za predpokladu, že neplatí $(\forall y)P(y)$, a potom za predpokladu, že $(\forall y)P(y)$ platí. Teda sme odvodili sekventy $\vdash (\forall y)P(y), (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)\big)$ a $(\forall y)P(y) \vdash (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)\big)$ každý zvlášť a výslednú formulu sme dostali použitím pravidla (Cut).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(z) \vdash P(z)}\,(\mathrm{I})}{P(z) \vdash (\forall y)P(y), P(z)}\,(\mathrm{WR})}{\vdash P(z) \Rightarrow (\forall y)P(y), P(z)}\,(\Rightarrow\mathrm{R})}{\vdash (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)\big), P(z)}\,(\exists\mathrm{R})}{\vdash P(z), (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)\big)}\,(\mathrm{PR})}{\vdash (\forall y)P(y), (\exists x)\big(P(x)\Rightarrow(\forall y)P(y)\big)}\,(\forall\mathrm{R}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\forall y)P(y) \vdash (\forall y)P(y)}\,(\mathrm{I})}{(\forall y)P(y), P(z) \vdash (\forall y)P(y)}\,(\mathrm{WL})}{(\forall y)P(y) \vdash P(z) \Rightarrow (\forall y)P(y)}\,(\Rightarrow\mathrm{R})}{(\forall y)P(y) \vdash (\exists x)\big(P(x)\Rightarrow(\forall y)P(y)\big)}\,(\exists\mathrm{R})}{\dfrac{\vdash (\exists x)\big(P(x)\Rightarrow(\forall y)P(y)\big),\ (\exists x)\big(P(x)\Rightarrow(\forall y)P(y)\big)}{\vdash (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)\big)}\,(\mathrm{CR})}\,(\mathrm{Cut})$$

$\square$

Na záver poznamenajme, že v Gentzenovskej predikátovej logike platia analógie Viet 9.6 a 9.7.

Cvičenia

Cvičenie 9.1. Pomocou sekventov odvoďte axiómy A1 a A3, čiže odvoďte:
a) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ b) $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$

Cvičenie 9.2. Pomocou sekventov odvoďte pravidlo sylogizmu a vetu o zámene predpokladov:
a) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$ b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Cvičenie 9.3. Pomocou sekventov odvoďte vety o obrátenej implikácii:
a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ b) $\vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$
c) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ d) $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Cvičenie 9.4. Pomocou sekventov odvoďte lemy z Kapitoly 2:
a) $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$ b) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
c) $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$ d) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$
e) $(A \wedge B) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

Cvičenie 9.5. Pomocou sekventov odvoďte, že ak platí $\Gamma, A \vdash B$ a zároveň $\Gamma, \neg A \vdash B$, tak potom platí aj $\Gamma \vdash B$.

Cvičenie 9.6. Pomocou sekventov odvoďte:
a) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ b) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
c) $\vdash B \Rightarrow (A \vee B)$ d) $\vdash A \Rightarrow (A \vee B)$
e) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow B$ f) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow A$
g) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ h) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$
i) $\vdash A \Rightarrow (A \wedge A)$ j) $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
k) $\vdash (A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow A$ l) $\vdash A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$
m) $\vdash ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ n) $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
o) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ p) $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (A \wedge \neg B)$
q) $\vdash (\ldots(\underbrace{(A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow A}_{2k\ A\text{-čiek}}$ r) $\vdash (\ldots((\neg A \Rightarrow \underbrace{A) \Rightarrow A) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow A}_{2k\ A\text{-čiek}}$
s) $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ t) $A \Rightarrow B \vdash (C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)$
u) $A \Rightarrow B \vdash (C \wedge A) \Rightarrow (C \wedge B)$ v) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash \neg(A \wedge \neg C)$

Cvičenie 9.7. Pomocou sekventov odvoďte:
a) $\vdash (A \vee (B \vee C)) \Rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$
b) $\vdash ((B \vee (A \vee C)) \vee A) \Rightarrow (A \vee (B \vee C))$
c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C),\ A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
d) $\vdash (A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow C))$
e) $A \Rightarrow B,\ C \Rightarrow D \vdash (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge D)$
f) $\vdash (A \Rightarrow (B \vee C)) \Rightarrow (((B \Rightarrow \neg A) \wedge \neg C) \Rightarrow \neg A))$

Cvičenie 9.8. Nech sú P a Q unárne predikáty a nech je T binárny predikát. Pomocou sekventov odvoďte:

a) $\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)$

b) $\vdash (\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(y)) \Rightarrow P(y)$

c) $(\forall x)P(x) \vdash (\exists y)P(y)$

d) $(\exists x)(\forall y)T(x, y) \vdash (\forall y)(\exists x)T(x, y)$

Cvičenie 9.9. Keby sme v Cvičení 9.8 v sekventoch c) a d) zamenili predpoklady s dôsledkami, tak dostaneme nepravdivé tvrdenia. Prečo analogické odvodenia nie sú korektné?

Cvičenie 9.10. Pomocou sekventov odvoďte:

a) $\vdash (\exists x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B)$

b) $\vdash ((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B) \Rightarrow (\exists x)(A \Rightarrow B)$

Cvičenie 9.11. Nech premenná x nemá voľný výskyt v B. Pomocou sekventov odvoďte:

a) $\vdash (\exists x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow B)$

b) $\vdash ((\forall x)A \Rightarrow B) \Rightarrow (\exists x)(A \Rightarrow B)$

c) $\vdash (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\exists x)A \Rightarrow B)$

d) $\vdash ((\exists x)A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x)(A \Rightarrow B)$

10 Modálna logika

Uvažujme výroky

$$\begin{aligned} A: &\quad \textit{Zajtra určite prídem.} \\ B: &\quad \textit{Možno zajtra prídem.} \end{aligned}$$

Tieto výroky sú odlišné, no vo výrokovej ani v predikátovej logike nevieme zachytiť rozdiel medzi nimi. Na zachytenie štruktúry týchto výrokov potrebujeme zaviesť *modálne unárne spojky*, povedzme $\Box$ a $\Diamond$. Spojku $\Box$ budeme čítať „určite“ a spojku $\Diamond$ budeme čítať „možno“. Potom ak p bude výrok „zajtra prídem“, tak môžeme písať

$$A: \quad \Box p \qquad\qquad \text{a} \qquad\qquad B: \quad \Diamond p.$$

Typy modálnych logík

Poznáme viacero typov modálnych logík. Medzi najznámejšie patria:

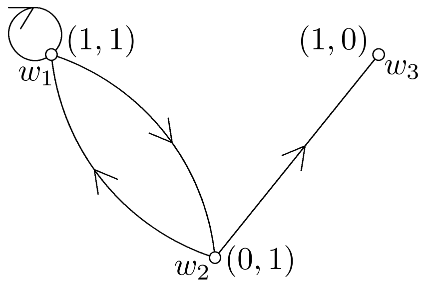
(1) *Aletická logika* (*logika aletických modalít*) s unárnymi modálnymi spojkami $\Box$ a $\Diamond$, ktoré čítame „je nutné“ a „je možné“.
(2) *Epistemická logika*, v ktorej $\Box$ možno čítať ako „x vie že“ a $\Diamond$ čítame „podľa vedomostí x môže byť pravda že“.
(3) *Temporálna logika* s modalitami pre časové vzťahy.
(4) *Deontická logika* s unárnymi operátormi „prikázané“, „povolené“ a „zakázané“.
(5) *Doaxtická logika*, v ktorej $\Box$ čítame „verí sa že“.

My sa budeme v tejto kapitole zaoberať aletickou modálnou logikou, takže spojky $\Box$ a $\Diamond$ budeme interpretovať ako nutnosť a možnosť. Potom bude jazyk modálnej logiky rozšírením jazyka výrokovej logiky o unárne spojky (operátory) $\Box$ a $\Diamond$.

Sémantika na základe pojmu možného sveta

Modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$ majú tú vlastnosť, že $\Box p$ a $\Diamond p$ nie sú jednoznačne určené pravdivostnou hodnotou výroku p. Toto spôsobovalo problém s interpretáciou, ktorý sa vyriešil použitím pojmov možných svetov. Vo svete w platí $\Box p$, ak vo všetkých svetoch dostupných z w platí p. Naopak, vo svete w platí $\Diamond p$, ak v aspoň jednom svete dostupnom z w platí p. Teraz túto ideu sformalizujeme.

Nech je W množina možných svetov a nech je R binárna relácia na W. Túto reláciu môžeme zakresliť pomocou orientovaného grafu. Na Obrázku 33 máme graf pre trojicu svetov, čiže $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, pre ktoré sú v relácii R usporiadané dvojice (w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_1) a (w_2, w_3). Pre jednoduchší zápis označíme množinu susedov vrchola w v grafe symbolom $\Gamma(w)$. Teda $w_i \in \Gamma(w)$ práve vtedy, keď $(w, w_i) \in R$. Pre reláciu na Obrázku 33 platí $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_1, w_3\}$ a $\Gamma(w_3) = \emptyset$.



Obrázok 33

Definícia (**Kripke**). Nech je W množina možných svetov, R je binárna relácia na W a ν nech je ohodnotenie prvotných formúl. Poznamenajme, že ohodnotenie ν môže pre rovnaké prvotné formuly v rôznych svetoch nadobúdať rôzne hodnoty, preto používame ν_w keď chceme špecifikovať, že ide o ohodnotenie pre svet w. Trojicu $\mathfrak{M} = (W, R, \nu)$ nazývame **model**. Symbolom $\overline{\nu}_w$ označujeme ohodnotenie ν_w rozšírené na všetky formuly vo svete w. Toto rozšírenie pre $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ definujeme analogicky ako v Kapitole 1. Pre modálne operátory $\Box$ a $\Diamond$ definujeme rozšírenie ohodnotenia nasledujúco:

$$\overline{\nu}_w(\Box\, A) = \begin{cases} \min\limits_{w' \in \Gamma(w)} \overline{\nu}_{w'}(A) & \text{pre } \Gamma(w) \neq \emptyset, \\ 1 & \text{pre } \Gamma(w) = \emptyset, \end{cases}$$

$$\overline{\nu}_w(\Diamond\, A) = \begin{cases} \max\limits_{w' \in \Gamma(w)} \overline{\nu}_{w'}(A) & \text{pre } \Gamma(w) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{pre } \Gamma(w) = \emptyset. \end{cases}$$

(1) Ak $\overline{\nu}_w(A) = 1$, tak píšeme $(\mathfrak{M}, w) \models A$, v opačnom prípade $(\mathfrak{M}, w) \not\models A$.
(2) Ak $\overline{\nu}_w(A) = 1$ pre každé $w \in W$, tak A je **pravdivá v modeli** $\mathfrak{M}$, čo zapisujeme $\mathfrak{M} \models A$.
(3) Ak platí $\mathfrak{M} \models A$ pre každý model $\mathfrak{M}$, tak A je **tautológia**, čo zapisujeme $\models A$.

Definíciu si objasníme na nasledujúcom príklade.

Príklad 10.1. Uvažujme model s dvoma prvotnými formulami p a q, ktorého graf a dvojice $(\nu(p), \nu(q))$ sú zobrazené na Obrázku 33. V Tabuľke 2 máme rozšírené ohodnotenie pre vybrané formuly jazyka modálnej logiky.

formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	1	1
$\Box q$	1	0	1
$\Diamond p$	1	1	0
$\Diamond q$	1	1	0
$\Box \neg p$	0	0	1
$\Box \neg q$	0	0	1
$\Diamond \neg p$	1	0	0
$\Diamond \neg q$	0	1	0
$\Box \Box p$	0	0	1
$\Diamond \Box p$	1	1	0
$\Box \Diamond p$	1	0	1
$\Diamond \Diamond p$	1	1	0

Tabuľka 2

Typy možných svetov

Keď na reláciu R nekladieme žiadne obmedzenia, môžu platiť tvrdenia, ktoré vyzerajú zvláštne. Všimnime si, že v Príklade 10.1 platí $\overline{\nu}_{w_3}(\Diamond p) = 0$ a zároveň $\overline{\nu}_{w_3}(\Box p) = 1$. Inými slovami, vo svete w_3 nie je p možné, ale je v ňom nutné. Preto uvažujeme nasledujúce vlastnosti.

Definícia. Nech je R binárna relácia na množine W.

(1) R je **všade definovaná** ak pre každé $u \in W$ existuje $v \in W$ také, že $(u, v) \in R$.
(2) R je **reflexívna** ak pre každé $u \in W$ platí $(u, u) \in R$.
(3) R je **tranzitívna** ak z platnosti $(u, v), (v, w) \in R$ vyplýva $(u, w) \in R$.
(4) R je **symetrická** ak z platnosti $(u, v) \in R$ plynie $(v, u) \in R$.

Obyčajne sa uvažujú logiky K, D, T, $S4$ a $S5$, ktoré sú definované pomocou rôzne silných relácií R.

K: na reláciu R nekladieme žiadne podmienky.
D: R je všade definovaná.
T: R je reflexívna
$S4$: R je reflexívna a tranzitívna.
$S5$: R je reflexívna, tranzitívna a symetrická.

Všimnime si, že táto pätica logík je hierarchicky usporiadaná. To znamená, že každá nižšie uvedená logika je definovaná reláciou, ktorá spĺňa všetky vlastnosti relácií logík uvedených vyššie.

Logiky K, D, T, $S4$ a $S5$ možno definovať aj axiomaticky. Uvažujme nasledujúce tvrdenia (axiómy):

AM1: $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$
AM2: $\Box A \Rightarrow \Diamond A$
AM3: $\Box A \Rightarrow A$
AM4: $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$
AM5: $\Diamond A \Rightarrow \Box \Diamond A$

a jedno nové odvodzovacie pravidlo:

PM: Ak $\vdash A$, tak potom aj $\vdash \Box A$.

Potom logiky K, D, T, $S4$ a $S5$ majú odvodzovacie pravidlá PM a modus ponens a okrem axióm výrokovej logiky majú ešte nasledujúce axiómy.

K: Axiómu AM1.
D: Axiómy AM1 a AM2.
T: Axiómy AM1 a AM3.
$S4$: Axiómy AM1, AM3 a AM4.
$S5$: Axiómy AM1, AM3, AM4 a AM5.

Všimnime si, že v logike K môžu platiť tvrdenia $\overline{\nu}_w(\Box A) = 1$, $\overline{\nu}_w(\Box \neg A) = 1$, $\overline{\nu}_w(\Diamond A) = 0$ a $\overline{\nu}_w(\Diamond \neg A) = 0$, pozri svet w_3 v Príklade 10.1. Znamená to že A aj $\neg A$ sú nutné, avšak ani jedno z A a $\neg A$ nie je možné. Takéto podivné tvrdenia v D, T, $S4$ a $S5$ už neplatia. V logike D však môže platiť $\overline{\nu}_w(A) = 0$ a zároveň $\overline{\nu}_w(\Box A) = 1$, pozri svet w_2 a formula p v Príklade 10.1. Aby sme sa takýmto zvláštnostiam vyhli, budeme sa v ďalšom zaoberať logikou T. To znamená, že pre každé $w \in W$ budeme predpokladať $(w, w) \in R$, čiže $w \in \Gamma(w)$.

Dualita medzi $\Box$ a $\Diamond$

Majme model $\mathfrak{M}$, $w \in W$ a formulu A. Keďže $\min\{f(x)\} = -\max\{-f(x)\}$, tak platí

$$\begin{aligned}\overline{\nu}_w(\Box A) &= \min_{w' \in \Gamma(w)} \{\overline{\nu}_{w'}(A)\} = 1 - \max_{w' \in \Gamma(w)} \{1 - \overline{\nu}_{w'}(A)\} = \\ &= 1 - \max_{w' \in \Gamma(w)} \{\overline{\nu}_{w'}(\neg A)\} = 1 - \overline{\nu}_w(\Diamond \neg A) = \overline{\nu}_w(\neg \Diamond \neg A).\end{aligned}$$

Analogicky

$$\begin{aligned}\overline{\nu}_w(\Diamond A) &= \max_{w' \in \Gamma(w)} \{\overline{\nu}_{w'}(A)\} = 1 - \min_{w' \in \Gamma(w)} \{1 - \overline{\nu}_{w'}(A)\} = \\ &= 1 - \min_{w' \in \Gamma(w)} \{\overline{\nu}_{w'}(\neg A)\} = 1 - \overline{\nu}_w(\Box \neg A) = \overline{\nu}_w(\neg \Box \neg A).\end{aligned}$$

Znamená to, že formula $\Box A$ je ekvivalentná s $\neg \Diamond \neg A$ a formula $\Diamond A$ je ekvivalentná s $\neg \Box \neg A$. Tieto tvrdenia sú analógiou de Morganových pravidiel pre modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$ a budeme ich využívať v nasledujúcej podkapitole.

Sémantické stromy

Pre sémantické stromy budeme okrem pravidiel zobrazených na Obrázkoch 1, 3 a 4 používať pravidlá pre modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$, pozri Obrázok 34. Tieto pravidlá plynú zo skutočnosti, že

$$\begin{array}{llll}
\min\limits_{w'\in\Gamma(w)}\{\overline{\nu}_{w'}(A)\}=1 & \text{práve vtedy keď} & \overline{\nu}_{w'}(A)=1 & \text{pre každé } w'\in\Gamma(w) \\
\max\limits_{w'\in\Gamma(w)}\{\overline{\nu}_{w'}(A)\}=1 & \text{práve vtedy keď} & \overline{\nu}_{w'}(A)=1 & \text{pre nejaké } w'\in\Gamma(w),
\end{array}$$

pričom z nedostatku miesta budeme namiesto slovného vyjadrenia „pre každé“, respektíve „pre nejaké“, používať značku $\forall$, respektíve $\exists$.

Tak ako máme uvedené na Obrázku 34, v prípade modálnej logiky budeme pred formulu písať značku $\models$ a meno sveta, v ktorom má byť daná formula splnená.

$$\begin{array}{ccl}
| & & \quad | \\
w\models\Box B & \text{nahraď} & \quad w\models\Box B \\
 & & \quad | \\
 & & \quad w'\models B \quad \forall w'\in\Gamma(w)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccl}
| & & \quad | \\
w\models\Diamond B & \text{nahraď} & \quad w\models\Diamond B \\
 & & \quad | \\
 & & \quad w'\models B \quad \exists w'\in\Gamma(w)
\end{array}$$

Obrázok 34

Ako v Kapitole 4, ak sa vo vetve sémantického stromu vyskytne tvrdenie aj jeho negácia, tak príslušnú vetvu už nemusíme ďalej rozvíjať. Takáto vetva je **uzavretá** a označujeme ju symbolom $\times$. Vetva je **otvorená** ak v nej nie je dvojica tvrdení, ktoré by boli v spore. Otvorenú vetvu označujeme symbolom $\bigcirc$. Avšak podobne ako v Kapitole 7, pri formulách modálnej logiky musíme byť oveľa opatrnejší ako pri formulách výrokovej logiky. Platí nasledujúca analógia Vety 4.3 (2).

VETA 9.1. *Formula modálnej logiky A je tautológia práve vtedy, keď sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté.*

Teraz si ukážeme použitie sémantických stromov na niekoľkých príkladoch. Podobne ako v predchádzajúcich kapitolách, číslujeme iba tie formuly, ktoré okamžite nerozvíjame a ku ktorým sa ešte musíme vrátiť.

PRÍKLAD. Pomocou sémantického stromu dokážte, že je formula A tautológia

$$A: \quad \Box B \Rightarrow \Diamond B\,.$$

Podľa Vety 9.1 stačí ukázať, že sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté. Teda nech $w\in W$. Sémantický strom pre $\neg A$ vo svete w je na Obrázku 35. Symbolom (D) sme označili využitie duality medzi $\Box$ a $\Diamond$. Sémantický strom má jedinú vetvu, v ktorej máme $w_1\models\neg B$ pre každé $w_1\in\Gamma(w)$ a tiež $w_2\models B$ pre každé $w_2\in\Gamma(w)$. To v prípade $w_1=w_2$ nemôže byť pravda, preto je táto vetva uzavretá.

$$
\begin{array}{lc}
 & w \models \neg(\Box B \Rightarrow \Diamond B) \\
 & | \\
(1) & w \models \Box B \\
 & w \models \neg \Diamond B \\
 & |\ (\mathrm{D}) \\
 & w \models \Box \neg B \\
 & | \\
 & w_1 \models \neg B \quad \forall w_1 \in \Gamma(w) \\
 & |\ (1) \\
 & w_2 \models B \quad \forall w_2 \in \Gamma(w) \\
 & \times
\end{array}
$$

Obrázok 35

Všimnime si, že keby platilo $\Gamma(w) = \emptyset$, tak by sme v predchádzajúcom príklade k sporu nedospeli. Znamená to, že formula $\Box B \Rightarrow \Diamond B$, ktorá je axióma AM2, je tautológia iba keď je relácia R všade definovaná, teda iba v D-logike.

Príklad. Pomocou sémantického stromu dokážte, že je formula A tautológia

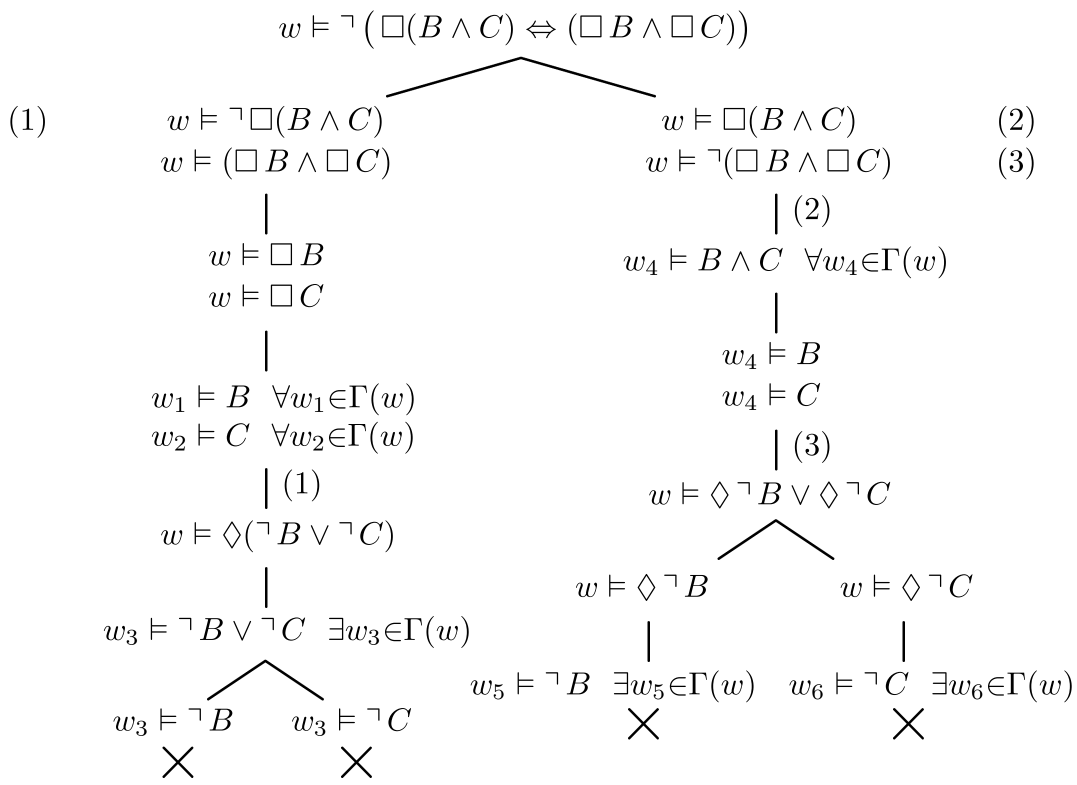
$$A: \quad \Box(B \wedge C) \Leftrightarrow (\Box B \wedge \Box C)\,.$$

Sémantický strom pre $\neg A$ je na Obrázku 36. V prvej vetve máme B pre každý svet w_1 z $\Gamma(w)$ a zároveň $\neg B$ pre nejaký svet w_3 z $\Gamma(w)$. Ak $w_1 = w_3$, tak dostávame spor a prvá vetva je uzavretá. Podobne máme v druhej vetve C pre každý svet w_2 z $\Gamma(w)$ a zároveň $\neg C$ pre nejaký svet w_3 z $\Gamma(w)$. Ak $w_2 = w_3$, tak dostávame spor a druhá vetva je uzavretá.

Prejdime teraz k pravej časti sémantického stromu. V tretej vetve máme B pre každý svet w_4 z $\Gamma(w)$ a zároveň $\neg B$ pre nejaký svet w_5 z $\Gamma(w)$. Ak $w_4 = w_5$, tak dostávame spor a tretia vetva je uzavretá. Podobne máme v štvrtej vetve C pre každý svet w_4 z $\Gamma(w)$ a $\neg C$ pre nejaký svet w_6 z $\Gamma(w)$. Ak $w_4 = w_6$ tak je táto vetva uzavretá, lenže my už máme $w_4 = w_5$. Znamená to, že ak $w_5 \neq w_6$, tak je štvrtá vetva otvorená? Pozrime sa na to ešte raz.

V pravej časti stromu máme $w_4 \models B \wedge C \;\; \forall w_4 {\in} \Gamma(w)$. Znamená to, že nižšie sme namiesto $w_4 \models B$ mali po správnosti písať stĺpček $w_5 \models B$, $w_6 \models B$, $\ldots$ pre všetky svety z $\Gamma(w)$ a hneď pod tým stĺpček $w_5 \models C$, $w_6 \models C$, $\ldots$ pre všetky svety z $\Gamma(w)$, pozri Obrázok 27. Teraz je už zrejmé, že keď to takto rozpíšeme, tak sú obidve vetvy v pravej časti sémantického stromu uzavreté. Preto je formula A tautológia.

V nasledujúcom príklade zostrojíme sémantický strom pre formulu, ktorá nie je tautológia.



Obrázok 36

Príklad. Pomocou sémantického stromu dokážte, že formula A nie je tautológia

$$A: \quad (\Diamond B \wedge \Diamond C) \Rightarrow \Diamond(B \wedge C)\,.$$

Sémantický strom pre $\neg A$ je na Obrázku 37. V ľavej vetve máme B pre nejaké w_1 z $\Gamma(w)$ a zároveň $\neg B$ pre každý svet w_3 z $\Gamma(w)$. Teda keď $w_1 = w_3$, dostávame spor a ľavá vetva je uzavretá. Naopak, v pravej vetve máme C pre nejaký svet w_2 z $\Gamma(w)$ a zároveň $\neg C$ pre každý svet w_3 z $\Gamma(w)$. Tu opäť dostávame spor, ale iba keď $w_2 = w_3$. Keďže už máme $w_1 = w_3$, dostali sme $w_1 = w_2$. Teda obidve vetvy sú uzavreté iba keď $w_1 = w_2$ $(= w_3)$, čo nemusí nutne platiť. Čo sa deje v ostatných prípadoch?

Pozrime sa na to pomocou Obrázku 27. Namiesto $w_3 \models \neg B \vee \neg C \ \ \forall w_3{\in}\Gamma(w)$ by sme mali písať stĺpček $w_1 \models \neg B \vee \neg C$, $w_2 \models \neg B \vee \neg C$, $\ldots$ pre všetky svety z $\Gamma(w)$. Teraz keď rozvinieme $w_1 \models \neg B \vee \neg C$, dostaneme dve vetvy, pričom ľavá vetva bude uzavretá kvôli dvojici $w_1 \models B$ a $w_1 \models \neg B$, no v pravej spor zatiaľ nie je. Preto ju rozvinieme podľa $w_2 \models \neg B \vee \neg C$. Tu bude uzavretá pre zmenu pravá vetva kvôli dvojici $w_2 \models C$ a $w_2 \models \neg C$, ale nie ľavá. Takže túto vetvu, v ktorej zatiaľ máme $w_1 \models B$, $w_2 \models C$, $w_1 \models \neg C$ a $w_2 \models \neg B$ potrebujeme ďalej rozvíjať. Lenže pri ďalšom rozvoji formuly $\neg B \vee \neg C$ v ďalších svetoch z $\Gamma(w)$ už spor nedostaneme, iba nové a nové vetvy. Preto je pravá vetva otvorená. To znamená, že formula A nie je tautológia.

Naša analýza sémantického stromu nám dáva aj návod na zostrojenie modelu, v ktorom uvažovaná formula neplatí. Podľa otvorenej vetvy tohoto stromu stačí voliť $\Gamma(w) = \{w_1, w_2\}$ (keďže uvažujeme iba T-logiky, tak povedzme $w_2 = w$), pričom $\nu_{w_1}(B) = 1$, $\nu_{w_1}(C) = 0$, $\nu_{w_2}(B) = 0$ a $\nu_{w_2}(C) = 1$. Teda modelom je ľubovoľný systém, ktorý obsahuje taký svet w, ktorý je v relácii s aspoň dvoma svetmi w_1 a w_2, pričom ohodnotenie je ako sme uviedli vyššie.

$$w \models \neg\big((\Diamond B \wedge \Diamond C) \Rightarrow \Diamond(B \wedge C)\big)$$

$$\begin{array}{ll} (1) & w \models \Diamond B \wedge \Diamond C \\ (2) & w \models \neg\Diamond(B \wedge C) \end{array}$$

$$\Big|\ (1)$$

$$\begin{array}{c} w \models \Diamond B \\ w \models \Diamond C \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} w_1 \models B & \exists w_1 {\in} \Gamma(w) \\ w_2 \models C & \exists w_2 {\in} \Gamma(w) \end{array}$$

$$\Big|\ (2)$$

$$w \models \Box\neg(B \wedge C)$$

$$w_3 \models \neg B \vee \neg C \quad \forall w_3 {\in} \Gamma(w)$$

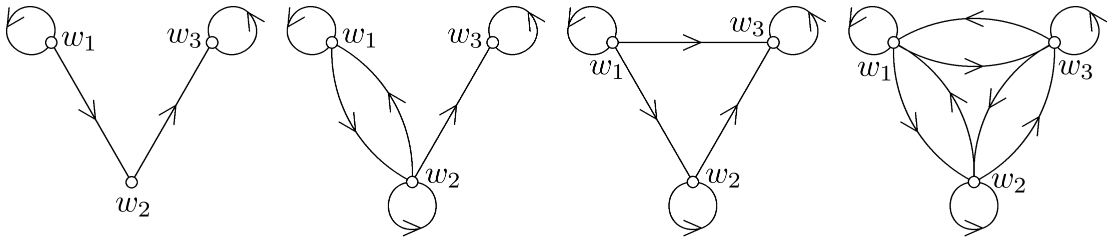
$$\begin{array}{cc} w_3 \models \neg B & w_3 \models \neg C \\ \times & \bigcirc \end{array}$$

Obrázok 37

Všimnime si, ako sa sémantické stromy pre výroky modálnej logiky podobajú na sémantické stromy pre výroky predikátovej logiky. Dôvodom je skutočnosť, že modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$ pracujú na svetoch z $\Gamma(w)$ ako kvantifikátory.

Cvičenia

Cvičenie 10.1. Na Obrázku 38 máme štyri rôzne relácie na trojprvkovej množine svetov $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Uvažujme ohodnotenie ν, ktoré pre dvojicu prvotných formúl (p, q) nadobúda pre svety w_1, w_2 a w_3 hodnoty $(1, 1)$, $(0, 1)$ a $(1, 0)$. Takýmto spôsobom dostávame štyri modely $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ a $\mathfrak{M}_4$. Zostavte pre tieto modely tabuľky analogické Tabuľke 2.



Obrázok 38

Cvičenie 10.2. Zistite, či pre modely $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ a $\mathfrak{M}_4$ z Cvičenia 10.1 platia tvrdenia AM2, AM3, AM4 a AM5.

Cvičenie 10.3. Pomocou sémantických stromov ukážte, že sú nasledujúce formuly tautológie.

a) $(\Box A \wedge \Diamond B) \Rightarrow \Diamond(A \wedge B)$

b) $(\Diamond \neg A \wedge \Box B) \Rightarrow \Box(a \Rightarrow B)$

c) $\Diamond(A \vee B) \Leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

d) $\Diamond(A \wedge B) \Rightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$

e) $(\Box(A \Rightarrow B) \wedge \Box A) \Rightarrow \Box B$

f) $(\Box(A \Rightarrow B) \wedge \Diamond A) \Rightarrow \Diamond B$

g) $(\Diamond(A \Rightarrow B) \wedge \Box A) \Rightarrow \Diamond B$

h) $(\Box A \wedge \Diamond B) \Rightarrow (\Diamond A \vee \Box B)$

i) $(\Box A \vee \Box B) \Rightarrow \Box(A \vee B)$

j) $\Box(A \vee B) \Rightarrow (\Box A \vee \Box A)$

Cvičenie 10.4. Pomocou sémantických stromov ukážte, že nasledujúce formuly nie sú tautológie. Potom pomocou otvorenej vetvy zostrojte protipríklad.

a) $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \Rightarrow (\Box A \vee \Box B)$

b) $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \Rightarrow \Box(A \vee B)$

c) $(\Diamond(A \Rightarrow B) \wedge \Diamond A) \Rightarrow \Diamond B$

d) $\Diamond(A \wedge B) \Rightarrow \Box(A \vee B)$

e) $\Box(A \vee B) \Rightarrow (\Box A \vee \Box B)$

f) $(\Box A \vee \Box \neg B) \Rightarrow \Box(A \Rightarrow B)$

Cvičenie 10.5. Zostrojte sémantické stromy pre nasledujúce formuly modálenj logiky. Viete z týchto stromov určiť, za akých podmienok sú formuly tautológie?

a) $\Box A \Rightarrow \Box \Box A$

b) $\Diamond A \Rightarrow \Box \Diamond A$

11 Viachodnotová logika

Uvažujme vetu

Najbližšie Vianoce bude v Bratislave pršať.

O jej pravdivosti má zmysel uvažovať, preto je výrokom. Problém vznikne, keď budeme chcieť určiť jeho pravdivostnú hodnotu. To dnes nedokážeme. Nuž a práve takéto tvrdenia viedli Łukasiewicza k zavedeniu *trojhodnotovej logiky.* V nej máme okrem logických konštánt 0 a 1 (lož a pravda) ešte konštantu 1/2, ktorej význam je „nevieme určiť".

Trojhodnotová logika

V nižšie uvedených tabuľkách máme zapísané, ako sa vyhodnocuje logický výraz v trojhodnotovej logike. Tabuľka pre negáciu je klasická, obsahuje stĺpec s ohodnotením prvotnej formuly A a ohodnotením formuly $\neg A$. Tabuľky zodpovedajúce binárnym spojkám $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ sú však iné. V nich máme v ľavom stĺpci ohodnotenie prvej formuly operácie a v hornom riadku ohodnotenie druhej formuly. Výsledné ohodnotenie je v políčku príslušného riadku a stĺpca. Tak napríklad pre $A \Rightarrow B$ ak $\nu(A) = 1/2$ a $\nu(B) = 0$, tak $\overline{\nu}(A \Rightarrow B) = 1/2$.

A	$\neg A$
0	1
1/2	1/2
1	0

$\wedge$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\vee$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\Rightarrow$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

$\Leftrightarrow$	0	1/2	1
0	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
1	0	1/2	1

Všimnime si, že keď sa v operáciách $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ obmedzíme na ohodnotenia 0 a 1, dostaneme výsledky ako v klasickej dvojhodnotovej logike. Druhé pozorovanie je, že $A \Rightarrow B$ a $\neg A \vee B$ už nie sú ekvivalentné formuly. To vieme zistiť pomocou pravdivostných tabuliek.

Príklad. Pomocou pravdivostných tabuliek ukážte, že v trojhodnotovej logike $A \Rightarrow B$ a $\neg A \vee B$ nie sú ekvivalentné formuly, teda nenadobúdajú pre ľubovoľné ohodnotenie prvotných formúl rovnaké hodnoty.

Zostrojíme pravdivostnú tabuľku. Keďže máme $3 \cdot 3 = 9$ rôznych ohodnotení prvotných formúl A a B, tak tabuľka má 9 riadkov. Označme písmenom Q formulu $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$. Dostávame:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	Q
0	0	1	1	1	1
0	1/2	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1/2	0	1/2	1/2	1/2	1
1/2	1/2	1	1/2	1/2	1/2
1/2	1	1	1/2	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1/2	1/2	0	1/2	1
1	1	1	0	1	1

Vidíme, že $A \Rightarrow B$ a $\neg A \vee B$ nie sú ekvivalentné pre jediné ohodnotenie, a síce pre $\nu(A) = \nu(B) = 1/2$.

Tautológie, kontradikcie a splniteľné formuly definujeme podobne ako v dvojhodnotovej logike.

Definícia. Nech je A výroková formula v trojhodnotovej logike. Potom platí:

(a) A je **tautológia** ak $\overline{\nu}(A) = 1$ pre každé ohodnotenie prvotných formúl ν.
(b) A je **kontradikcia** ak $\overline{\nu}(A) = 0$ pre každé ohodnotenie prvotných formúl ν.
(c) A je **splniteľná** ak existuje ohodnotenie prvotných formúl ν také, že platí $\overline{\nu}(A) = 1$.

Všimnime si, že ak formula nie je kontradikcia, tak nemusí byť splniteľná.

Príklad. Pravdivostnou tabuľkou ukážte, že formula $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$ je tautológia.

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, pravdivostná tabuľka bude mať 9 riadkov. Označme Q formulu $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$. Dostávame

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$	$B \Rightarrow A$	Q
0	0	1	1	1	1	1
0	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1
0	1	1	0	0	0	1
1/2	0	1/2	1	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1
1/2	1	1/2	0	1/2	1/2	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1/2	0	1/2	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

čiže $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$ je tautológia.

Jedna z najdôležitejších vlastností trojhodnotovej logiky je, že v nej neplatí zákon vylúčenia tretieho. Teda $A \vee \neg A$ nie je tautológia. Práve tento zákon dvojhodnotovej logiky má z rôznych dôvodov dosť odporcov.

n-hodnotová logika

n-hodnotová logika, $n > 3$, je ďalším zjemnením trojhodnotovej logiky. V n-hodnotovej logike máme n pravdivostných hodnôt výrokov:

$$0,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-1},\ \ldots,\ \frac{n-2}{n-1},\ 1.$$

Logické spojky už nedefinujeme pomocou tabuliek, ale funkciami.

Definícia 11.1. Nech sú A a B formuly a nech je ν ohodnotenie prvotných formúl v n-hodnotovej logike. To znamená, že $\overline{\nu}(A), \overline{\nu}(B) \in \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1\}$. Potom ohodnotenie negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie a ekvivalencie definujeme pomocou nasledujúcich pravidiel.

Negácia: $\overline{\nu}(\neg A) = 1 - \overline{\nu}(A)$.

Konjunkcia: $\overline{\nu}(A \wedge B) = \min\{\overline{\nu}(A), \overline{\nu}(B)\}$.

Disjunkcia: $\overline{\nu}(A \vee B) = \max\{\overline{\nu}(A), \overline{\nu}(B)\}$.

Implikácia: $\overline{\nu}(A \Rightarrow B) = \min\{1, 1 - \big(\overline{\nu}(A) - \overline{\nu}(B)\big)\}$.

Ekvivalencia: $\overline{\nu}(A \Leftrightarrow B) = 1 - |\overline{\nu}(A) - \overline{\nu}(B)|$.

Všimnime si, že pre $n = 3$ sú tieto definície v súlade s tabuľkami pre trojhodnotovú logiku z predchádzajúcej podkapitoly.

Otázka je, či sú takto získané logiky rôzne. Teda či sa dajú odlíšiť pomocou tautológií, ktoré v nich platia. Kladnú odpoveď dáva nasledujúca veta.

Veta. *Nech sú $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prvotné formuly a nech je A_n formula*

$$A_n : \bigvee_{1 \le i < j \le n} (a_i \Leftrightarrow a_j)\,.$$

Potom A_n je tautológia v i-hodnotovej logike pre každé i, pre ktoré $2 \le i \le n-1$, a A_n nie je tautológia v j-hodnotovej logike pre každé j, pre ktoré $j \ge n$.

Dôkaz. Všimnime si, že v A_n máme ekvivalenciu pre každú dvojicu prvotných formúl $a_1, a_2, \ldots, a_n$. To značí, že A_n pozostáva z $\binom{n}{2}$ ekvivalencií, ktoré sú spojené disjunkciami.

Najprv uvažujme i-hodnotovú logiku, kde $i \le n-1$. Zvoľme si ľubovoľné ohodnotenie ν. Ukážeme, že $\overline{\nu}(A_n) = 1$. Keďže máme n prvotných formúl, ale iba i rôznych hodnôt zvolenej logiky, kde $i \le n-1$, tak aspoň dve rôzne prvotné formuly budú pri ohodnotení ν nadobúdať rovnaké hodnoty. Nech sú to formuly a_k a a_ℓ. Potom $\overline{\nu}(a_k \Leftrightarrow a_\ell) = 1$ a keďže A_n je disjunkcia viacerých formúl, z ktorých jedna už má hodnotu 1, konkrétne $a_k \Leftrightarrow a_\ell$, tak $\overline{\nu}(A_n) = 1$. Keďže ν bolo zvolené ľubovoľne, tak pre ľubovoľné ohodnotenie ν prvotných formúl máme $\overline{\nu}(A_n) = 1$, čiže A_n je tautológia.

Teraz uvažujme j-hodnotovú logiku, kde $j \geq n$. Ak si zvolíme ohodnotenie ν tak, že

$$\nu(a_1) = 0,\ \nu(a_2) = \frac{1}{j-1},\ \ldots,\ \nu(a_k) = \frac{k-1}{j-1},\ \ldots,\ \nu(a_n) = \frac{n-1}{j-1},$$

tak žiadne dve prvotné formuly nebudú mať rovnaké ohodnotenie. Znamená to, že žiadna z ekvivalencií v A_n nenadobúda hodnotu 1, a preto aj $\overline{\nu}(A_n) < 1$. Čiže v j-hodnotovej logike A_n nie je tautológia. $\square$

Ukážeme si ešte jedno tvrdenie pre n-hodnotové logiky.

Tvrdenie. *V n-hodnotovej logike je formula $A \Leftrightarrow \neg A$ splniteľná práve vtedy, keď je n nepárne, $n \geq 3$.*

Dôkaz. Pripomeňme, že 1-hodnotové logiky v tomto texte neuvažujeme, takže $n \geq 2$. Nech je ν ohodnotenie prvotných formúl také, že $\overline{\nu}(A \Leftrightarrow \neg A) = 1$. Keďže $\overline{\nu}(A \Leftrightarrow \neg A) = 1$ platí práve vtedy, keď $\overline{\nu}(A) = \overline{\nu}(\neg A)$ a $\overline{\nu}(\neg A) = 1 - \overline{\nu}(A)$, tak musí platiť $\overline{\nu}(A) = 1 - \overline{\nu}(A)$. To značí, že platí $2 \cdot \overline{\nu}(A) = 1$, čiže $\overline{\nu}(A) = 1/2$. Lenže pravdivostnú hodnotu $1/2$ máme iba v n-hodnotových logikách pre nepárne n. $\square$

Fuzzy logika

Pod *Fuzzy logikou* rozumieme takú logiku, v ktorej pravdivostná hodnota môže nadobúdať ľubovoľnú reálnu (respektíve racionálnu) hodnotu z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dôvodom pre takéto zovšeobecnenie sú *fuzzy*, čiže neostré ohraničenia.

Keby sme sa spýtali ľubovoľného človeka, či je päťročné dieťa mladé, asi by odpovedal „áno“. Teda pravdivostná hodnota výroku:

Päťročné dieťa je mladé,

by bola 1. Keby sme podobným spôsobom uvažovali výrok:

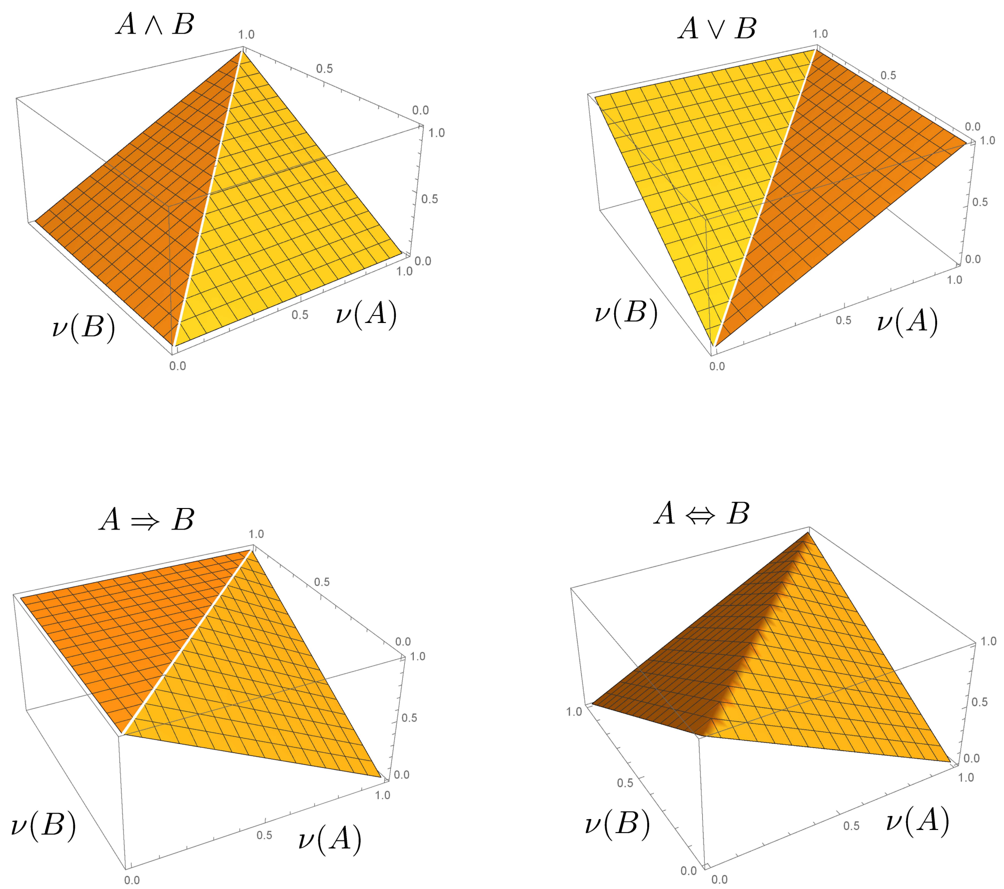
Storočná babička je mladá,

tak asi by každý človek prisúdil tomuto výroku pravdivostnú hodnotu 0. Avšak pri výroku:

Tridsaťročný otecko je mladý,

by hodnotenie záviselo od toho, kto ho robí. Pätnásťročný žiak výrok asi označí za nepravdivý, zatiaľ čo päťdesiatročný učiteľ ho bude zrejme považovať za pravdivý. Ak výrok označí za pravdivý x percent populácie, môžeme mu priradiť pravdivostnú hodnotu $x/100$. Nuž a práve takéto tvrdenia a ohodnotenia sú motiváciou pre logiku, v ktorej je pravdivostná hodnota ľubovoľné číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Logické spojky sa vo fuzzy logike definujú tak isto ako v n-hodnotovej logike, pozri Definíciu 11.1. Funkcie, ktorými sa definujú binárne spojky $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ môžeme znázorniť pomocou plôch v trojrozmernom priestore, pozri Obrázok 39.



Obrázok 39

Ak chceme vo fuzzy logike ukázať, že je nejaká formula tautológia, prípadne kontradikcia, či iba splniteľná, postupujeme logickou úvahou podobne ako v predchádzajúcej podkapitole.

Axiomatická výstavba nekonečnohodnotovej logiky

Tak ako klasickú dvojhodnotovú, či modálnu logiku, aj viachodnotovú logiku môžeme budovať z axióm pomocou odvodzovacích pravidiel, pričom odvodené (dokázané) tvrdenia budú práve tautológie. V tejto časti si ukážeme axiomatizáciu nekonečnohodnotovej logiky, kde pravdivostné hodnoty môžu nadobúdať ľubovoľnú racionálnu hodnotu z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Podobne ako v Kapitole 2, najprv si rozdelíme výrokové spojky na základné a odvodené.

Definícia. **Základné výrokové spojky** sú $\urcorner$ a $\Rightarrow$, pričom $\vee$, $\wedge$ a $\Leftrightarrow$ sú **odvodené výrokové spojky**. Odvodené výrokové spojky definujeme pomocou základných takto:

(a) **disjunkcia**: $A \vee B$ je skrátený zápis výrazu $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$;
(b) **konjunkcia**: $A \wedge B$ je skrátený zápis výrazu $\neg(\neg A \vee \neg B)$;
(c) **ekvivalencia**: $A \Leftrightarrow B$ je skrátený zápis výrazu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Všimnime si, že na konjunkciu sme použili disjunkciu a na ekvivalenciu konjunkciu. Znamená to, že keby sme chceli konjunkciu aj ekvivalenciu zapísať iba pomocou negácie a implikácie, dostali by sme:

(b) $A \wedge B$ je skrátený zápis výrazu $\neg\big((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B\big)$;
(c) $A \Leftrightarrow B$ je skrátený zápis výrazu $\neg\big(\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A)\big)$, čiže $\neg\big(\big(\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow A)\big) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow A)\big)$.

Teraz môžeme zaviesť axiómy a odvodzovacie pravidlá.

Definícia. Nekonečnohodnotová logika, ktorej pravdivostné hodnoty sú racionálne čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, má nasledujúce štyri axiómy:

(L1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(L2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
(L3) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(L4) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

Odvodzovacie pravidlo je jediné. Je ním **modus ponens**, ktorý tvrdí, že z formúl A a $A \Rightarrow B$ vieme odvodiť B.

Všimnime si, že (L1) je presne axióma (A1), ďalej (L2) je trochu ináč zapísané pravidlo sylogizmu, formula (L3) je veta o obrátenej implikácii a (L4) vlastne tvrdí $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$. Pomocou Definície 11.1 overte, že (L1), (L2), (L3) a (L4) sú tautológie. (V prípade (L2) je overenie trochu prácnejšie.)

Záverom poznamenajme, že logické spojky možno definovať aj ináč ako pomocou Definície 11.1, čím dostaneme iné viachodnotové (respektíve fuzzy) logiky.

Cvičenia

Cvičenie 11.1. Pomocou pravdivostných tabuliek zistite, ktoré z nasledujúcich formúl sú tautológie trojhodnotovej logiky.

a) $A \Rightarrow A$
b) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
c) $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
d) $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
e) $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$
f) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$
g) $A \Rightarrow (A \vee B)$
h) $B \Rightarrow (A \vee B)$
i) $(A \wedge B) \Rightarrow A$
j) $(A \wedge B) \Rightarrow B$
k) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
l) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
m) $(A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow A$
n) $A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$
o) $((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
p) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
q) $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$
r) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
s) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$
t) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Cvičenie 11.2. Úvahou zistite, ktoré z nasledujúcich formúl sú tautológie trojhodnotovej logiky.

a) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
b) $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
c) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$
d) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\urcorner A \Rightarrow B) \Rightarrow C))$

Cvičenie 11.3. Pomocou pravdivostných tabuliek alebo úvahou zistite, či sú nasledujúce formuly trojhodnotovej logiky splniteľné.

a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow \urcorner A)$
b) $(A \Rightarrow B) \wedge (\urcorner B \Rightarrow A)$
c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\urcorner A \vee B)$
d) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)$
e) $\urcorner(A \vee C) \vee ((B \vee C) \Rightarrow A)$
f) $(A \wedge B \wedge \urcorner C) \Rightarrow \urcorner(A \Rightarrow (B \vee C))$

Cvičenie 11.4. Platia v n-hodnotovej logike de Morganove pravidlá?

Cvičenie 11.5. Úvahou zistite, či sú formuly z Cvičení 11.1 a 11.2 tautológie n-hodnotovej logiky.

Cvičenie 11.6. Úvahou zistite, či sú formuly z Cvičení 11.1 a 11.2 tautológie fuzzy logiky.

Literatúra

[1] Birkhoff, G. – Bartee, T.O.: *Aplikovaná algebra.* Alfa, Praha, 1981.

[2] Knor, M.: *Matematická logika a diskrétne štruktúry.* Slovenská technická univerzita, Bratislava, 2008. ISBN 978-80-227-2837-9

[3] Kolář, J. – Štěpánková, O. – Chytil, M.: *Logika, algebry a grafy.* SNTL, Praha, 1989.

[4] Kvasnička, V. – Pospíchal, J.: *Matematická logika.* Slovenská technická univerzita, Bratislava, 2006. ISBN 8022724491

[5] Mleziva M.: *Neklasické logiky.* Svoboda, Praha, 1970.

[6] Wolfram research, Inc.: *Mathematica. Version 10.* Wolfram research, Ing., Champaign, Illinoys, 2016.

[7] Olejár, D. – Škoviera, M.: *Úvod do diskrétnej matematiky I.* MFF UK, Bratislava, 1992.

[8] Švejdar, V.: *Logika, neúplnost, složitost, nutnost.* ACADEMIA, Praha, 2002. ISBN 80-200-1005-X

[9] Prispievatelia wikipédie: *Mathematical logic (with subpages).* Wikipedia, The Free Encyclopedia, Wikipedia, 2016.

Obsah

ISBN 978-80-227-4656-4